

1. Bevezetés

Számos gyakorlatban felmerülő probléma vizsgálata során segítséget nyújthat, ha átfoglalmazzuk gráfelméleti feladattá, azaz kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesítünk a gráfelméleti feladat megoldása, és a konkrét probléma megoldása között. Ez nemcsak azért hasznos, mert áttekinthetőbbé, matematikailag kezelhetőbbé válik a problémánk, hanem azért is, mert első látásra különböző problémák vezethetnek ugyanarra a feladatra. A továbbiakban az általunk választott feladat a színezés lesz. Mielőtt összefoglalnánk a szükséges alapismereteket, definíciókat, és azt, hogy pontosan mit is értünk színezésen, lássunk egy-két példát gráfokra. Ha megérkezünk egy társaságba, rögtön felmérjük, kit ismerünk, és kit nem. Eredményünket a síkon igen szemléletesen ábrázolhatjuk. Bizonyos pontokat (hívjuk őket csúcsoknak) a jelenlévő emberekhez rendelünk, és két csúcsot összekötünk, ha a hozzájuk rendelt emberek ismerik egymást. Gráffal ábrázolhatjuk például egy jégkorongbajnokságban a különböző csapatok mérkőzéseit. Minden csapatnak megfeleltetünk egy pontot, két pontot annyi él köt össze, ahányszor a két csapat játszott egymással. A győztesnek megfeleltetett pontból a vesztesé felé vezető él végére nyilat rajzolunk. (A döntetlent most nem engedjük meg.)

2. Definíciók

Induljunk ki egy V véges halmazból; ennek elemei lesznek a gráf *csúcsai*. Az i és j csúcsokat összekötő élt megfeleltetjük az $[i, j]$ párnak, az így kapott párok felsorolását jelöljük E -vel. Egy $[i, j]$ pár annyiszor eleme E -nek, ahány él összeköti i -t és j -t. (Emiatt E nem feltétlenül halmaz.) Szokásos még $[i, j] \in E$ esetén az i és j *szomszédos* csúcsokról, vagy $e = [i, j]$ jelölés esetén az e *élre illeszkedő* csúcsokról beszélni. E jelöléssel az e él *végpontjai* i és j . Két él *szomszédos*, ha van közös végpontjuk.

A $G = (V, E)$ gráf *egyszerű*, ha nincs olyan éle, amelynek végpontjai azonosak (*hurokél*), és tetszőleges két csúcsát nem köti össze egynél több él (nincs *többszörös* éle G -nek). Ez utóbbi feltétel azt biztosítja, hogy E is halmaz lesz, hiszen nem lesz két különböző él azonos végpontokkal.

A $G = (V, E)$ gráf *részgráfja* a $H = (V', E')$ gráf, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ úgy, hogy E' elemeinek végpontjai benne vannak V' -ben. Ezt a feltételt azért követeljük meg, mert egyébként előfordulhatna az, hogy egy él valamely végpontja nem tartozna a részgráfhoz.

A $\vec{G} = (V, \vec{E})$ gráf *irányított*, ha $\vec{E}$ elemei rendezett párok. Az irányítatlan gráf éleitől eltérően (i, j) -vel jelöljük $\vec{E}$ elemeit, és $(i, j) \in \vec{E}$ esetén i -ből j -be mutató élről beszélünk. Az $e = (i, j)$ jelölés esetén az e él *kezdőpontja* i , *végpontja* j .

Legyen $i_0, i_1, \dots, i_k \in V$ és $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$. Az $(i_0, e_1, i_1, e_2, i_2, \dots, i_{k-1}, e_k, i_k)$ sorozatot *sétának* nevezzük, ha e_j az i_{j-1} -et és i_j -t összekötő él minden $j = 1, 2, \dots, k$ esetben. Ha $i_0 = i_k$, akkor a séta *zárt*. Ha a csúcsok mind különbözők, akkor a séta neve *út*. Ha ezen kívül zárt is, akkor ez egy *kör* a gráfban. Az út vagy a kör hosszán az őt alkotó élek számát értjük. Irányított gráfokban hasonló módon definiálható az *irányított út* és az *irányított kör* fogalma.

Az i csúcs *foka* a G gráfban az i -re illeszkedő élek száma. Jele: $d_G(i)$. A G gráf d -*reguláris*, ha $d_G(i) = d$ minden i csúcsra. Egy i csúcs G -beli szomszédainak halmazát jelölje $M_G(i)$.

Álljon F a G gráf bizonyos éleiből. F *párosítás*, ha nem tartalmaz szomszédos éleket. Ha G éleit felbontjuk diszjunkt párosításokra, akkor G egy *élszínezését* kapjuk. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az éleket kiszínezzük néhány színnel úgy, hogy minden csúcsra csupa különböző színű él illeszkedjen. Az azonos színű élek alkotják a párosításokat, hiszen minden élt csak egy színnel színeztük (nincs tarka él) épp úgy, hogy két azonos színű ne lehessen szomszédos.

Ha az F olyan párosítás, amelyben a benne szereplő élek végpontjai kiadják V -t, röviden, ha F 1-reguláris, akkor F neve: *faktor*. G éleinek felbontása diszjunkt faktorokra a *faktorizáció*.

3. Sportversenyek lebonyolítása

Bizonyos sportágak bajnokságát körmérkőzéses formában bonyolítják le. Ez azt jelenti, hogy a bajnokság több fordulóból áll, egy-egy fordulóban bármely két csapat legfeljebb egyszer játszik, a bajnokság végére viszont bármely két csapat pontosan egyszer megmérkőzik egymással. Feladatunk megszervezni n csapat körmérkőzéses bajnokságát úgy, hogy az a lehető legkevesebb fordulóból álljon. A fordulók számát minimalizálni könnyű lesz, maga a lebonyolítás pedig faktorizációs problémához vezet.

Legyen n páros, a páratlan n esetét majd erre vezetjük vissza. Készítsük el a következő gráfot. Minden csapatnak feleltessünk meg egy csúcsot, majd a kapott n csúcs között húzzunk be minden lehetséges élt. Az így kapott gráfot K_n -el jelöljük, és n csúcsú *teljes* gráfnak hívjuk. Könnyű látni, hogy K_n $(n-1)$ -reguláris. Tekintsük K_n egy élszínezését; a különböző színű élek halmazait jelöljük $M_1, M_2, \dots, M_d$ -vel, ahol M_1 az „1”-színű, M_2 a „2”-színű, $\dots$, M_d a „ d ”-színű élek halmaza. Most már kapható egy sportverseny-lebonyolítás úgy, hogy ha $[i, j] \in M_p$, akkor az i és a j csapat a p -edik napon (fordulóban)

mérkőzik. Páros n esetén d elméletileg elérhető minimuma $n - 1$ (K_n tetszőleges élszínezése esetén $d \geq n - 1$, hiszen van olyan csúcs (mind), amelynek foka $n - 1$, azaz $n - 1$ különböző színre mindenképpen szükség van), ekkor minden fordulóban minden csapat játszik. Gráfnyelvre lefordítva K_n élszínezését keressük $n - 1$ színnel, ami nem más, mint K_n faktorizációja, ahol az i -edik faktorba eső éleket színezzük az „ i ” színnel. Páros n esetén viszont K_n faktorizálható, ez egy konkrét faktorizáció előállításából azonnal látszik. Jelöljük K_n csúcsait az $1, 2, \dots, n$ számokkal. Az első $n - 1$ csúcsot rakjuk le egy szabályos $(n - 1)$ -szög csúcsaira, az utolsót pedig a szimmetria-középpontra. Az első faktor legyen a következő: kössük össze az 1-es csúcsot a szimmetria-középpontban lévő n -es csúccsal, a 2-est az $(n - 1)$ -essel, a 3-ast az $(n - 2)$ -essel, stb... Az összes többi faktort úgy kapjuk, hogy mindig elforgatjuk az előző ábrát a szimmetria-középpont körül $360^\circ/n$ fokkal (a számozás marad). K_6 előző faktorizációját láthatjuk az 1. ábrán (most még ne zavarjanak az irányított élek). Akik matematikailag pontosabban is szeretnék megfogalmazni az állítást, azok számára megjegyezzük, hogy F_i (az i -edik faktor) felírható a következő alakban:

$$F_i = \{[n, i]\} \cup \{[i + k, i - k] \mid k = 1, 2, \dots, (n/2) - 1\},$$

ahol az $i + k$, illetve az $i - k$ értékek modulo $(n - 1)$ értendőek.

Páratlan n esetén vegyünk fel egy fiktív csapatot, végezzük el az előző faktorizációt, majd a sportverseny-lebonyolítást úgy kapjuk, hogy fordulóként a fiktív csapattal összekerült csapat pihen. Így páratlan n esetén egy $n + 1$ fordulás bajnokságot kapunk, és könnyen látható, hogy jobbat nem is várhatunk.

Valamivel érdekesebbé tehetjük a feladatunkat, ha figyelembe vesszük a hazai, illetve vendég mérkőzéseket. Gráfmodellünkben ezt úgy tehetjük meg, hogy az $[i, j]$ éleket kicseréljük (i, j) irányított élekre, és egy (i, j) él esetén azt mondjuk, hogy i vendég mérkőzést játszik j otthonában. Így, ha már van egy élszínezésünk, akkor még irányítanunk is kell valahogy az éleket. Ezt *irányított élszínezésnek* hívjuk, és $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_d$ -vel jelöljük. Ezek után könnyen elképzelhető, hogy mit jelent az *irányított faktorizáció*. Egy irányított élszínezés a konkrét verseny-lebonyolítást hasonlóan definiálja, mint az előbbi esetben, itt ha $(i, j) \in \vec{M}_p$, akkor az i vendég mérkőzést játszik j otthonában a p -edik fordulóban. Adott lebonyolítás esetén kitölthetünk egy táblázatot (a Hazai–Vendég Mérleg-et, a továbbiakban HVM), $2n$ csapat esetén $2n \times (2n - 1)$ -es lesz, a sorok a csapatoknak, az oszlopok a fordulónak felelnek meg, és az i -edik sor k -adik helyére V-t, H-t írunk, ha az i -edik csapatnak a k -adik fordulóban vendég, hazai mérkőzése van, vagy 0-t, ha ekkor pihen. Állapodjunk meg a következő jelölésekben: jelölje S a lebonyolítást, az S -hez tartozó HVM jele $H(S)$, az elemeit pedig $h_{ik}(S)$ jelöli. Az i csapat *idénye* a $H(S)$ i -edik sora.

A csapatok nem szeretik, ha idényükben egymás után ugyanolyan betű áll, azaz ha két egymást követő forduló mindegyikében hazai vagy vendég mérkőzést kell játszaniuk. Így feladatunk – a csapatok beleegyezésével – az, hogy a faktorizáció után az egyes faktorokban lévő éleket úgy irányítsuk, hogy a fenti nem kívánt előfordulások számát minimalizáljuk. A könnyebb hivatkozás kedvéért, ha $h_{ik}(S) = h_{i,k+1}(S) = H$ vagy V , akkor azt mondjuk, hogy az i -edik csapatnak *kritikus* mérkőzése van a $(k + 1)$ -edik fordulóban. Az előbbi fogalmak szemléltetésére K_6 egy irányított faktorizációja látható az 1. ábrán, a táblázatban pedig az ehhez tartozó HVM, ahol a kritikus mérkőzéseket aláhúztuk.

	1. forduló	2. forduló	3. forduló	4. forduló	5. forduló
1. csapat	V	H	V	H	V
2. csapat	V	H	<u>H</u>	V	H
3. csapat	H	V	<u>V</u>	H	V
4. csapat	V	H	V	H	<u>H</u>
5. csapat	H	V	H	V	<u>V</u>
6. csapat	H	V	H	V	H

A kritikus mérkőzések számára alsó becslés elég könnyen adható, ehhez szükségünk van még egy gráfelméleti fogalomra. A G gráf csúcsaiból álló halmazt *függetlennek* mondjuk G -ben, ha nem tartalmaz szomszédos csúcsokat. Jelölje $\alpha(G)$ a független G -beli halmazoknak a maximális méretét. Az ígért becslés a következő:

Tétel. Legyen G d -reguláris, faktorizálható, $2n$ csúcsú gráf. Ekkor tetszőleges irányított faktorizációjához $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_d$ -hez) tartozó kritikus mérkőzések száma legalább $2(n - \alpha(G))$.

Bizonyítás. (i) Először azt látjuk be, hogy legfeljebb $\alpha(G)$ csapatnak azonos az idénye. Tegyük fel, hogy $T > \alpha(G)$ csapatnak azonos az idénye. Mivel T számú csúcs között biztos van két szomszédos, mondjuk i és j , így lesz i - j mérkőzés, azaz valamilyen k -ra $h_{ik}(S) \neq h_{jk}(S)$. (Ha egy i - j mérkőzés az egyik csapatnak hazai, akkor a másiknak vendég.) Ez viszont ellentmondás, azaz $\alpha(G) \geq T$.

(ii) Legfeljebb $2\alpha(G)$ csapatnak lehet kritikus mérkőzések nélküli idénye, hiszen (i)-ből adódóan legfeljebb $\alpha(G)$ csapat van, melynek idénye H-val kezdődik és nincs kritikus mérkőzése, hasonlóan legfeljebb $\alpha(G)$ csapat van, melynek idénye V-val kezdődik és nincs kritikus mérkőzése.

(iii) Így már adódik, hogy legalább $2n - 2\alpha(G) = 2(n - \alpha(G))$ idény van legalább egy kritikus mérkőzéssel, ebből viszont következik az állítás.

Következmény. K_{2n} tetszőleges $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{2n-1})$ irányított faktorizációjához tartozó kritikus mérkőzések száma legalább $2n - 2$.

K_6 esetén ez a szám 4, és mint látható a táblázatban, az általunk adott faktorizációhoz éppen 4 kritikus mérkőzés tartozik, tehát optimális abban az értelemben, hogy kevesebb kritikus találkozóval nem lehet 6 csapat bajnokságát lebonyolítani.

4. Egy feladatkiosztási probléma

Tegyük fel, hogy m munkással dolgoztatunk. Jelöljük őket $P_1, P_2, \dots, P_m$ -mel, halmazukat P -vel. A munkásokkal el kell végeztetnünk n munkát, jelük legyen $\mathcal{J} = (J_1, J_2, \dots, J_n)$. Minden munka részfeladatokra van felosztva a munkásoknak megfelelően, azaz bármely J_j munka $T_{1j}, T_{2j}, \dots, T_{mj}$ részekre osztott, ahol a T_{ij} részt csak a P_i munkás végezheti el. Tegyük még fel, hogy az előbbi T_{ij} feladatot a P_i munkás p_{ij} idő alatt végzi el, ahol p_{ij} egész. (Ha valamely p_{ij} nulla, akkor azt mondjuk, hogy a megfelelő T_{ij} nem létezik.) A feltételekhez tartozik még, hogy egy adott munka részfadatait nem végeztethetjük el egyszerre, valamint egy munkás egyidőben csak egy részfeladattal foglalkozhat. Az első feltételt úgy magyarázhatjuk, hogy csak egy munkaállomással rendelkezünk munkánként, így egyidőben csak egy munkás dolgozhat. Feladatunk ezek után az, hogy minél rövidebb idő alatt végezzünk az összes munkával.

Gráfmodellt ebben az esetben is könnyű adni. Legyenek a csúcsok a munkások és a munkák, jelöljük P_i illetve J_j -vel. Ha egy T_{ij} részfeladat elvégzésének ideje p_{ij} , akkor húzzunk be p_{ij} darab $[P_i, J_j]$ élt.

Ha most tekintünk egy élszínezést, $M_1, M_2, \dots, M_d$ -t, akkor definiálható egy d idejű megoldás a következő módon: az első időegység elején kezdjük el az M_1 -beli éleknek megfelelő részmunkákat, a második időegység elején az eddigieket félbeszakítjuk, majd az M_2 -beli éleknek megfelelőeket kezdjük el, stb... Így a két feltételt valóban nem sértjük meg, de olyan eset előfordulhat, hogy egy munkás nem fejezi be teljes egészében a ráosztott feladatot, hanem egy másikba kezd, majd később visszatér a félbehagyotthoz. Ezt persze nem is tiltottuk meg. Nézzük meg figyelmesebben a modellezés során nyert gráfot. A csúcsait két diszjunkt halmazba sorolhatjuk úgy, hogy a halmazokba eső csúcsok között él nem vezet. Az ilyen struktúrájú gráfok neve: *páros gráf*. Már a 3. pontban is felhasználtuk azt az egyszerű ténnyt, hogy egy gráf élszínezésének mérete legalább akkora, mint a maximális fokszáma (jele: $\Delta(G)$). Páros gráfok esetében viszont többet is mondhatunk:

König-tétel. Ha G páros gráf, akkor létezik élszínezése $\Delta(G)$ színnel.

Vagyis feladatunk megoldható $\Delta(G)$ idő alatt (ennél gyorsabban nem is lehet), sőt az is igaz, hogy egy ilyen feladatkiosztást „gyorsan” találhatunk. $\Delta(G)$ felírható p_{ij} -k segítségével a következő módon:

$$\Delta(G) = \max \left\{ \max_g \sum_j p_{gj}, \max_j \sum_g p_{gj} \right\}.$$

Érdekesebb lehet a feladat, ha figyelembe vesszük a munkabéreket, vagy más költségeket. Ekkor ésszerű kérdés, hogy ne csak gyorsan, de olcsón is végezzünk az összes munkával.

Hogy a fenti problémát matematikailag leírjuk, jelöljük c_i -vel az i -edik időegység átlagos költségét, azaz az összes költség az i -edik időegység alatt $c_i |M_i|$, ahol $|M_i|$ az i -edik időegység alatt végzett munkák száma (az „ i ” színű élek száma G -ben). Így ha $M_1, M_2, \dots, M_k$ egy élszínezés, akkor az ehhez tartozó S megoldás (ütemezés) összköltsége: $\sum c_i |M_i|$.

Egy $G = (V, E)$ hurokél mentes gráf esetén egy $H = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ nemnegatív egészekből álló sorozatot *szín-megengedettnek* hívunk, ha $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_k$; $\sum h_i = |E|$ és létezik k színű élszínezése G -nek, $M_1, M_2, \dots, M_k$ úgy, hogy $|M_i| = h_i$ $i = 1, 2, \dots, k$ esetén.

Két sorozatot összehasonlíthatunk: legyenek $H = (h_1, h_2, \dots, h_k)$, $H' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_k)$ szín-megengedettek G -ben. $H \geq H'$, ha $h_1 + h_2 + \dots + h_j \geq h'_1 + h'_2 + \dots + h'_j$ teljesül minden $j = 1, 2, \dots, k$ esetén.

Legyen $C(G)$ a G -beli szín-megengedett sorozatok halmaza. Mivel h_i értéke 0 is lehet, k értékét minden sorozat esetén vehetjük $|E|$ -nek (az élek számának). Ekkor $|C(G)| < \infty$. Egy $H \in C(G)$ *maximális*, ha nincs olyan $H' \in C(G)$, hogy $H' \neq H$ és $H' \geq H$.

Érdemes megemlíteni a következő állítást:

Tétel. Ha $H \in C(G)$ és $H \geq H'$, akkor $H' \in C(G)$.

A 2. ábrán látható gráfnak (amelyről könnyen belátható, hogy páros gráf) kétféle élszínezését ábrázoltuk a 3. ábrán (ahol a számok különböző színeket jelentenek). A megfelelő sorozatok: $H = (5, 2, 2)$ és $H' = (4, 4, 1)$. A fenti tételből adódik, hogy $(4, 3, 2)$ és $(3, 3, 3)$ is szín-megengedett, hiszen $(4, 3, 2) \leq H$ és $(3, 3, 3) \leq (4, 3, 2)$.

Tegyük fel, hogy a költségek rendezettek: $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$. Ez a feltevés nem jelenti az általánosság megszorítását.

Tétel. A $c(H) = \sum c_i h_i$ minimális értékét olyan $H \in C(G)$ esetén veszi fel, ami maximális.

Bizonyítás. Legyen $H' \in C(G)$ olyan, ami nem maximális. Ekkor létezik $H \in C(G)$ maximális úgy, hogy $H \geq H'$. Egyrészt

$$(*) \quad \sum c_i h'_i = c_1(h'_1 + h'_2 + \dots + h'_k) + (c_2 - c_1)(h'_2 + h'_3 + \dots + h'_k) + \dots + (c_k - c_{k-1})h'_k.$$

Valamint $H \geq H'$ miatt

$$h_1 \geq h'_1 h_1 + h_2 \geq h'_1 + h'_2 : h_1 + h_2 + \dots + h_k = h'_1 + h'_2 + \dots + h'_k.$$

Kivonva rendre minden egyenlőtlenséget az utolsó egyenletből, azt kapjuk, hogy

$$h'_2 + h'_3 + \dots + h'_k \geq h_2 + h_3 + \dots + h_k h'_3 + h'_4 + \dots + h'_k \geq h_3 + h_4 + \dots + h_k : h'_k \geq h_k.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket $(*)$ -ba helyettesítve $((c_i - c_{i-1}) \geq 0$ miatt):

$$\sum c_i h'_i \geq c_1(h_1 + h_2 + \dots + h_k) + (c_2 - c_1)(h_2 + h_3 + \dots + h_k) + \dots + (c_k - c_{k-1})h_k = \sum c_i h_i.$$

Tehát azt kaptuk, hogy nem maximális sorozat nem lehet minimális költségű, ez pedig ekvivalens a tétel állításával.

E tétel alapján tehát elég lenne az összköltség minimalizálásához $C(G)$ -ben maximális sorozatot keresni. Viszont lehet több maximális sorozat is $C(G)$ -ben, például a 3. ábrán látható $(5, 2, 2)$ és $(4, 4, 1)$ mindegyike maximális. Sőt, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 3)$ költségek esetén a minimális összköltség a $(4, 4, 1)$ sorozat esetén adódik, míg $(c_1, c_2, c_3) = (0, 2, 3)$ költségek esetén pedig $(5, 2, 3)$ -nál.

5. Frekvencia-hozzárendelés

Az újabb problémák megoldásához szükségünk lesz a gráfszínezések egy újabb csoportjának megismerésére. Eddig a gráfunk éleit színeztük, most viszont áttérünk a csúcsok színezésére. Egy színezést akkor tekintünk „jó”-nak, ha minden szomszédos csúcspár különböző színt kap. Ezt valamivel precízebben is megfogalmazhatjuk. Legyen G egy irányított gráf. Az $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ függvényt a G gráf klasszikus $(k$ -színű) színezésének mondjuk, ha G minden (i, j) irányított élére teljesül, hogy

$$(1) \quad f(j) - f(i) \neq 0.$$

Ezt az egyszerű definíciót általánosítva eljutunk egy olyan színezés definícióhoz, ami használható lesz a vizsgálandó problémánk szempontjából. Először is minden (i, j) élhez rendeljünk egy T_{ij} -vel jelölt, egészekből álló halmazt úgy, hogy minden T_{ij} tartalmazza a nullát. Az előbbi definíció általánosításaként k -színű T -színezésről beszélünk, ha az előbbi f függvényre (1) helyett

$$(2) \quad f(j) - f(i) \notin T_{ij}$$

teljesül G minden (i, j) élére. Vegyük észre, hogy ha minden $T_{ij} = \{0\}$, akkor a T -színezés egybeesik a klasszikus színezéssel.

Rendeljünk minden i csúcshoz egy c_i pozitív egészt. Tegyük fel, hogy az (i, j) élnekhez rendelt T_{ij} halmazokra teljesül, hogy

$$(3) \quad \{-c_j + 1, -c_j + 2, \dots, c_i - 2, c_i - 1\} \subseteq T_{ij}.$$

Ilyen feltételek mellett a T -színezést intervallum T -színezésnek hívjuk. Az elnevezés magyarázata az a szemléletes kép, hogy ha minden i csúcshoz c_i egymás utáni színt rendelünk, akkor szomszédos csúcsok színei között nem lesznek azonosak. Abban az esetben, amikor minden csúcshoz az 1 számot rendeljük, visszakapjuk a T -színezést, hiszen a (3) feltétel a $\{0\} \subseteq T_{ij}$ feltétellel redukálódik.

Visszatérve a gyakorlati kérdésekre, megfogalmazhatunk két olyan problémát is, melyek a lehető legkevesebb színű intervallum T -színezések megkeresésére vezethetők vissza.

Az első probléma hasonlít a munkakiosztási feladathoz, viszont itt más feltételeket szabunk. Legyen J az elvégzendő munkák halmaza. Jelölje c_i az i munka elvégzésének idejét. Bizonyos i, j párok nem végezhetők egyszerre, míg más i, j pároknál olyan feltételt írunk elő, hogy j megkezdése előtt i -nek be kell fejeződnie. Feltétel még, hogy ha elkezdünk egy munkát, akkor azt be is kell fejezni. A feladat ezek után az, hogy a lehető legrövidebb idő alatt elvégezzük az összes munkát a feltételek megtartása mellett.

A modellt a következő módon gyártjuk: minden i munkának feleltessünk meg egy csúcsot, és lássuk el a c_i értékkel. Ha i és j nem végezhető egyszerre, akkor húzzunk be egy (i, j) élt, és ahhoz rendeljük hozzá a $T_{ij} = \{-c_j + 1, \dots, c_i - 1\}$ halmazt. Ha j csak akkor végezhető, ha i befejeződött, akkor húzzunk be ugyancsak egy (i, j) élt, de a

$$T_{ij} = \{-M, -M + 1, \dots, c_i - 1\}$$

halmazzal, ahol M egy „elegendően” nagy (pozitív) szám (pl: $M = \sum c_i$). Könnyen látható, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesíthetünk az előbb konstruált gráf k -színű intervallum T -színezése, és az eredeti probléma k időegység alatti ütemezése között. Sőt, az is könnyen adódik, hogy a gráfnak pontosan akkor létezik intervallum T -színezése, ha azon (i, j) élek, amelyekre $T_{ij} = \{-M, -M + 1, \dots, c_i - 1\}$, nem alkotnak irányított kört.

A kapott modellt kis módosítással általánosabb probléma esetén is használhatjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy j csak akkor kezdhető, ha i befejezése után legalább p idő eltelt (például meg kell száradnia a festéknek). A modellt úgy módosítjuk ebben az esetben, hogy felvesszünk egy fiktív f csúcsot $c_f = p$ értékkel, valamint behúzzuk az (i, f) és az (f, j) éleket a $T_{if} = \{-M, \dots, c_i - 1\}$ és a $T_{fj} = \{-M, \dots, p - 1\}$ halmazokkal.

Érdekes megjegyezni, hogy ha a modellként kapott gráf csak olyan (i, j) éleket tartalmaz, amelyekre $T_{ij} = \{-M, \dots, c_i - 1\}$, akkor a legkisebb intervallum T -színezés megtalálása visszavezethető az úgynevezett leghosszabb út keresésre. Nem túl precízen fogalmazva ezt úgy kell elképzelni, hogy minden élre rá van írva a „súlya”, a mi esetünkben egy (i, j) él súlya c_i lesz, és egy út súlyát a benne szereplő élek súlyainak összege definiálja. A leghosszabb út keresés az a feladat, hogy minden i csúcsra meghatározzuk az i végpontú utak közül a leghosszabbat. Ha ezt megoldottuk, akkor egyszerűen kapható a megfelelő intervallum T -színezés, ugyanis az i csúcsához rendelt $f(i)$ legyen a leghosszabb út hossza.

A következő problémához tegyük fel, hogy rendelkezünk erősítőkhöz egy V halmazával, valamint lehetséges frekvenciákkal, melyeket egész számokkal reprezentálunk. Feladatunk a frekvenciákat úgy hozzárendelni az erősítőkhöz, hogy a nem kívánt interferenciákat elkerüljük. A legegyszerűbb esetben a frekvenciákat 50 kHz-es egységekben számoljuk, és a következő két feltételt követeljük meg:

- (a) Ha két erősítő közel van egymáshoz, akkor frekvenciájuk között legalább 50 kHz-nyi különbségnek kell lenni.
- (b) Ha két erősítő nagyon közel van egymáshoz, akkor a különbségnek legalább 100 kHz-nek kell lenni.

A problémához tartozó gráfban az erősítők felelnek meg az csúcsoknak. Az (a) esetben behúzzunk egy (i, j) élt $T_{ij} = \{0\}$ halmazzal, a (b) esetben pedig ugyancsak egy (i, j) élt, de $T_{ij} = \{-1, 0, 1\}$ halmazzal. Legyen még minden i csúcsra $c_i = 1$. Most is könnyen leellenőrizhető a kölcsönösen egyértelmű kapcsolat a gráf k -színű intervallum T -színezései, valamint az eredeti probléma olyan megoldása között, ahol az előforduló legnagyobb frekvencia legfeljebb $50k$ kHz. Ha tehát a legnagyobb előforduló frekvenciát a lehető legkisebbre akarjuk választani, akkor itt is a legkisebb intervallum T -színezés megkeresése a feladat.

Egy speciális esetben a lehető legkevesebb színt használó intervallum T -színezés megkeresése viszonylag egyszerűen megoldható. A speciális eset megfogalmazásához szükségünk lesz egy fogalomra:

Definíció. Egy $G = (V, E)$ gráf indukált részgráfja a $H = (V', E')$ gráf, ha részgráfja, valamint E' azokból az E -beli élekből áll, amelyeknek mindkét végpontja V' -ben van, és E' az összes ilyen élt tartalmazza.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az eredeti gráf bizonyos csúcsait tekintem csak, viszont ezen csúcsokra illeszkedő valamennyi G -beli élt. A speciális eset mármost a következő: legyen G olyan egyszerű gráf, mely nem tartalmaz 4 csúcson áthaladó, azaz 3 hosszú utat (jele: P_4), indukált részgráfként. Ekkor igaz a következő állítás:

Tétel. A fenti tulajdonságú G gráf minden nemtriviális (azaz nem csak egy pontból álló) H részgráfjának vagy van két olyan i és j csúcsa, melyek szomszédosak, és $M_H(i) - \{y\} = M_H(j) - \{i\}$ (egypetűjű ikrek), vagy van két olyan i és j csúcsa, melyek nem szomszédosak, és $M_H(i) = M_H(j)$ (kétpetűjű ikrek).

E tétel alapján meghatározhatjuk a legkisebb intervallum T -színezést. Futassuk le a következő algoritmust:

- (1. lépés) Megvizsgáljuk, hogy a G gráf triviális-e. Ha igen, akkor befejezzük az algoritmust, ha nem, akkor ugrunk a 2. lépésre.
- (2. lépés) A tétel alapján választhatunk G -ből egy i, j ikerpárt.
- (3. lépés) Ha egypetűjű ikerpárt sikerült választanunk, akkor a j -hez tartozó új c_j legyen $c_i + c_j$. Ellenkező esetben legyen $c_j = \max(c_i, c_j)$.
- (4. lépés) Az új G gráfot úgy kapjuk, hogy töröljük G -ből az i csúcsot a rá illeszkedő élekkel együtt. Ezután visszaugrunk az 1. lépésre.

Az algoritmus lefutása után marad egyetlen z csúcs valamilyen c_z értékkel. Ekkor található egy c_z -színű intervallum T -színezés, mégpedig úgy, hogy „visszafelé” futtatjuk az algoritmust (ezt úgy tehetjük

meg könnyedén, ha a futás során feljegyezzük, hogy az ikerpárok mely tagját töröltük, a régi c_i értékkel együtt). Ha egy z csúcs az egypetűjű i, j ikerpárból keletkezett, akkor z -t felbontjuk az i és a j csúcsokra úgy, hogy i kapja az első c_i , j pedig az utolsó c_j szint. Ha z az i, j kétpetűjű ikerpárból keletkezett, akkor z -t szintén felbontjuk i -re és j -re, viszont i illetve j mindegyike az első c_i illetve c_j szint kapja (kaphatja, hiszen a kétpetűjű ikrek nem szomszédosak).

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy K_{2n} esetén mindig van olyan irányított faktorizáció, amelyhez tartozó kritikus meccsek száma éppen $2n - 2$.
2. Miért maximálisak az $(5, 2, 2)$ és $(4, 4, 1)$ sorozatok?
3. Bizonyítsuk be, hogy a feladatkiosztási problémához konstruált gráfra:

$$\Delta(G) = \max \left\{ \max_g \sum_j p_{gj}, \max_j \sum_g p_{gj} \right\}$$

teljesül.

4. Bizonyítsuk be az ikrekről szóló állítást.

Farkas Gyula, Budapest

