

1. a) Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_2 3 + \log_2 3^2 + \dots + \log_2 3^n = \log_2 81.$$

b) Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait:

$$2\sqrt{3^{2x-2} + 9^x - 81} = 96 - 9^{x-1} - 3^{2x}.$$

2. Egy derékszögű háromszög a és b befogóira fennáll, hogy

$$2 \cdot \lg \frac{a+b}{4} = \lg a + \lg b.$$

Számítsuk ki $\sin 2\alpha$ értékét, ahol α az a -val szemközti szöget jelöli.

3. Igazoljuk, hogy ha egy téglalap egyik átlójának felező merőlegese a téglalap hosszabbik a oldalát két olyan részre osztja, amelyek közül az egyik hossza megegyezik a rövidebb b oldallal, akkor $a+b$ egy a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója lesz.

4. Egy háromszögben a szokásos jelölést alkalmaztuk, a c oldallal szemben van a γ szög, és a c oldalhoz tartozik az m_c magasság. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{c}{\sin \gamma} > m_c$.

5. Az $A_0A_1 \dots A_n$ töröttvonal töréspontjainak koordinátáit a következő módon határozhatjuk meg: $A_{4k}(0; -2k)$, $A_{4k+1}(4k + 1; 2k + 1)$, $A_{4k+2}(-1; 2k + 1)$, $A_{4k+3}(-4k - 4; -2k - 2)$, ahol k nemnegatív egész szám. Milyen hosszú ez a vonal A_0 -tól A_{1997} -ig?

6. Egy tetraéder szemközti élei páronként egyenlőek, a három különböző él $2\sqrt{85}$, $3\sqrt{41}$, $\sqrt{421}$ egység hosszú. Mekkora a kitérő élek távolsága?

7. Három pont, A , B és C a térképen derékszögű háromszöget alkot úgy, hogy B -nél van a derékszög. A és B között 80, B és C között 120 méter a szintkülönbség. A -ból B -be 10° -os emelkedőjű, B -ből C -be 12° -os emelkedőjű egyenes út vezet. Határozzuk meg A és C távolságát légvonalban. Mekkora az ABC szög a valóságban?

8. Tekintsük az első n pozitív egész szám köbének összegét, és osszuk el az első n pozitív egész szám négyzetének összegével. Kaphatunk-e hányadosul egész számot, ha $n > 1$ egész?

Számadó László, Budapest