

1. Igazoljuk, hogy ha egy trapéz átlói merőlegesek, akkor szárainak szorzata legalább akkora, mint a párhuzamos oldalak szorzata.

I. megoldás. Jelöljük az átlók metszéspontját E -vel, az $AB, BC, CD, DA, AE, EC, BE, ED$ szakaszok hosszát rendre $a, b, c, d, e_1, e_2, f_1, f_2$ -vel (1. ábra). Ekkor azt kell igazolnunk, hogy $bd \geq ac$.

Mivel minden tényező pozitív, azért ez egyenértékű annak igazolásával, hogy $b^2 d^2 \geq a^2 c^2$.

Mindegyik tényező egy-egy derékszögű háromszög átfogója. Ezeket Pitagorasz tétele alapján kifejezve az

$$(e_2^2 + f_1^2)(e_1^2 + f_2^2) \geq (e_1^2 + f_1^2)(e_2^2 + f_2^2)$$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk, vagy átrendezve a következőt:

$$(e_1^2 - e_2^2)(f_1^2 - f_2^2) \geq 0.$$

Ez viszont igaz, mert az AEB és a CED háromszögek hasonlóak, így

$$e_1 \geq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \geq f_2 \quad \text{vagy} \quad e_1 \leq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \leq f_2.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha a két háromszög egybevágó, azaz az átlók felezik egymást, tehát a trapéz paralelogramma, mivel pedig az átlói merőlegesek, így rombusz. Ekkor az oldalak egyenlők, s így a két szorzat valóban egyenlő.

II. megoldás. Ismeretes – és a Pitagorasz-tétel négyeszeri alkalmazásával könnyen belátható – hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek, ha a szemközti oldalpárok négyzetének az összege egyenlő. Az előző megoldás jelöléseit használva fennáll tehát a következő egyenlőség:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2.$$

Átrendezve és teljes négyzetté kiegészítve ebből az

$$(1) \quad (b + d)^2 - (a + c)^2 = 2(db - ac)$$

egyenlőség adódik. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a bal oldal nemnegatív. Ehhez kiegészítjük az ábrát. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A -n túl az $AF = c$ szakasszal, továbbá jelöljük C tükörképét E -re G -vel (2. ábra). Ekkor $ACDF$ paralelogramma, a $BCDG$ deltoidban pedig $BG = b$ és $GD = c$. Így $AGDF$ szimmetrikus trapéz, tehát $GF = d$.

A BGF háromszögből a háromszögegyenlőtlenség szerint

$$b + d \geq a + c,$$

tehát (1) bal oldala valóban nemnegatív. Egyenlőség akkor áll fenn, ha G A -ba esik, vagyis a trapéz átlói felezik egymást, továbbá feltétel szerint merőlegesek, tehát a négyszög rombusz.

III. megoldás. Húzzunk párhuzamosokat a trapéz csúcsain át az átlókkal. Ezek egy $PQRS$ téglalapot határolnak, amit az átlók résztéglalapokra osztanak, így $PE = a$, $QE = b$, $RE = c$, $SE = d$ (3. ábra). Az ABE és CDE háromszögek hasonlóak, így az $APBE$ és a $CRDE$ téglalapok is, tehát a PE és az ER átló egy egyenesbe esik, együtt a nagy téglalap átlóját alkotják.

Az ábrán ac eszerint úgy jelenik meg, mint a téglalap köré írt kör átmérője két szeletének szorzata. Messe SE a kört másodszor az S' pontban. Tudjuk, hogy ekkor

$$ac = SE \cdot ES' = d \cdot ES'.$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy $ES' \leq b$.

Feltehetjük, hogy $a \geq c$. Ekkor a kör O középpontja a PE szakaszra esik. A QOS' háromszög egyenlő szárú. Alapjának a felező merőlegese O -n megy keresztül, tehát az OR szakaszra eső E pontra

$$ES' \leq EQ = b,$$

és ezt kellett belátnunk. Ismét látható, hogy akkor áll fenn egyenlőség, ha O és E egybeesik, amikor is a trapéz rombusz.

2. Egy konferenciára két országból, A -ból és B -ből érkezik egy-egy azonos létszámú küldöttség; tagjaik közül néhányan már régebből ismerték egymást. Bizonyítsuk be, hogy az A országbeli tagok közül kiválasztható néhány (legalább egy) úgy, hogy teljesüljön az alábbi lehetőségek valamelyike:

a) a kiválasztottak között a B országbeli tagok mindegyikének páros számú ismerőse van;

b) a kiválasztottak között a B országbeli tagok mindegyikének páratlan számú ismerőse van.

I. megoldás. Legyen a küldöttségek létszáma n . Az A országbeli minden csoporthoz hozzárendelünk egy zérusokból és egyesekből álló n -elemű sorozatot; ennek a j -edik eleme 0, ha a B -beli küldöttség j -edik tagja páros számú embert ismer a csoportból, és 1, ha páratlan számút ismer. Így egyrészt 2^n különböző sorozat keletkezhet, másrészt $2^n - 1$ különböző csoport választható ki az A -beli küldöttségből. Ha mindegyik csoporthoz különböző sorozat tartozik, akkor tehát a $(0, 0, \dots, 0)$ és az $(1, 1, \dots, 1)$ legalább egyike előfordul, vagyis az a) és b) lehetőségeknek legalább egyike teljesül.

Ha van két különböző csoport, amelyekhez ugyanaz a sorozat tartozik, akkor vegyük azokat a küldötteket, akik az elsőben benne vannak, a másodikban nincsenek benne, továbbá azokat, akik az elsőben nincsenek benne, a másodikban benne vannak. Mivel a két csoport különböző, elhagyva azokat (ha vannak), akik mindkét csoporthoz hozzátartoznak, legalább egy A -beli küldött marad. Ekkor minden B -beli küldött első csoportbeli ismerőseinek a száma ugyanannyival változik, mint a másodikbeli ismerőseinek a száma, a két megmaradt részcsoporthoz tartozó küldött ismerőseinek az együttes száma tehát páros. Az így keletkezett csoportra ekkor az a) lehetőség teljesül.

II. megoldás. A küldöttségek létszáma (n) szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk a feladat állítását. Egytagú küldöttségek esetén az A -beli küldöttet vagy ismeri a B -beli küldött, vagy nem. Ennek megfelelően a b) vagy az a) lehetőség teljesül.

Tegyük most fel, hogy n -tagú küldöttségek esetén igaz a bizonyítandó állítás, és tekintsünk két $(n + 1)$ -tagú küldöttséget. Az A -beli küldöttség tagjait jelöljük a_i -vel, a B -beli tagjait b_i -vel, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül b_{n+1} -et. Ha sorra figyelmen kívül hagyjuk a_1 -et, a_2 -t, $\dots$, a_{n+1} -et, akkor a megmaradók közül mindig van legalább egy jó kiválasztás, tehát olyan, amelyikhez vagy az n -darab 0-ból álló sorozat, vagy az n darab 1-ből álló sorozat tartozik.

Ezek a jó kiválasztások az $(n + 1)$ -tagú küldöttségből is kiválasztások. Közülük egyesek állhatnak ugyanazokból az A -beli küldöttekből, de nem kaphattuk mindegyik esetben ugyanazt a csoportot, mert mindegyik A -beli küldöttet figyelmen kívül hagytuk egyszer. Vegyünk két különböző jó kiválasztást. Ha valamelyikből b_{n+1} is ugyanolyan páros-ságú embert ismer, mint a küldöttsége többi tagjai, akkor a csoportra teljesül a megfelelő lehetőség az egész B -beli küldöttséget véve is tekintetbe.

Ha nem ez a helyzet, és mind a két csoporthoz az n darab c -ből álló sorozat tartozik, ahol c vagy 0, vagy 1, akkor a b_{n+1} -hez tartozó szám mind a két csoport esetében $1 - c$. Ha a két csoporthoz különböző n -elemű sorozatok tartoznak, akkor b_{n+1} az egyik csoportból páratlan számú embert ismer, a másiktól páros számút, csak fordított sorrendben, mint a többiek.

Vegyük azokat az A -beli embereket, akik valamelyik csoportban benne vannak, de nem mind a kettőben. Ekkor minden B -beli embernek ugyanannyival változik az első csoportbeliek közti ismerőseinek a száma, mint a második csoportbeliek közöttieké. Így a megmaradtak között az első esetben minden b_i -nek összesen páros számú ismerőse van, beleértve b_{n+1} -et is; a második esetben viszont minden B -beli küldöttnak, b_{n+1} -nek is páratlan számú ismerőse van. Található tehát jó kiválasztás $(n + 1)$ -tagú küldöttségek esetében is. Ez a tulajdonság tehát öröklődik, így akárhány tagú küldöttségre fennáll.

3. Jelöljön n és k tetszőleges nemnegatív egész számot. Tegyük fel, hogy egy konvex n -szögnek berajzoltuk $2kn + 1$ átlóját. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan töröttvonal, amely $2k + 1$ berajzolt átlóból áll, és egyetlen ponton sem halad át egynél többször. Mutassuk meg, hogy kn átló berajzolása esetén ez nem feltétlenül igaz.

Megoldás. Olyan töröttvonal létezését bizonyítjuk, amelyik nem záródik. Világos, hogy nem változtat a feladaton, ha azt tesszük fel, hogy legalább $2kn + 1$ átló van berajzolva.

A feladat állítását k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $k = 0$ esetén 1 átló van berajzolva, és ez megfelel a feltételnek.

Tegyük most fel, hogy adott (elegendő nagy) n esetén az n -oldalú sokszögekre k -nak valamilyen j értékével igaz az állítás, és egy n -szögben $2(j + 1)n + 1$ átló van berajzolva. Ekkor az olyan csúcsoknál (ha vannak), amelyekből egy berajzolt átló indul, hagyjuk egyelőre figyelmen kívül ezt az átlót, amelyekből pedig egynél több átló indul, ott a hozzá a két oldalon legközelebbi csúcshoz vezető átlót. Ezzel legfeljebb $2n$ átlót hagyunk el. Ekkor legalább $2jn + 1$ berajzolt átló marad meg, tehát kiválasztható közülük egy $2j + 1$ átlóból álló töröttvonal. Jelöljük ebben az első és utolsó átlót A_0A_1 , illetve $A_{2j}A_{2j+1}$ -gyel.

A töröttvonal az A_0A_1 , illetve az $A_{2j}A_{2j+1}$ egyenesek egyik oldalára esik, hiszen nem megy át egy ponton egynél többször, és a sokszög konvex. Miután maradt még a végpontokból induló, behúzott átló, így azokban két-két átlót hagyunk figyelmen kívül. Ekkor azonban hozzácsatolhatjuk mindegyik végponthoz azt az eddig figyelmen kívül hagyott átlót, amelyik a szélső szakasz egyenesének a másik oldalára esik, mint a töröttvonal. Ezzel $2(j + 1) + 1$ szakaszból álló töröttvonalat kapunk. A bizonyítandó állítás helyessége tehát öröklődik $2(j + 1)n + 1$ átló berajzolása esetére is, így minden k -ra igaz.

A feladat második állítására térve az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a sokszög szabályos. A könnyebb tárgyalásmód kedvéért mondjunk egy átlót h hosszúságúnak, ha az egyik oldalára a sokszögnek h oldala esik, a másikra ennyi vagy ennél több. Megjegyezzük, hogy egy n oldalú sokszögbe akkor rajzolható be nk átló, ha páratlan n esetén $n \geq 2k + 3$, páros n esetén pedig $n \geq 2k + 4$.

Belátjuk, hogy az állítás igazolására alkalmas a következő konstrukció: páratlan n esetén minden csúcsból meghúzzuk a k leghosszabb átlót, páros n esetén pedig a k leghosszabb átlót a „legesleghosszabb” (a szemközti csúcsokhoz vezető) kivételével. Így minden csúcs $2k$ átló végpontja, tehát $2kn$ átlóvégpont, azaz kn átló jön létre.

Tegyük fel, hogy kiválasztható r szakaszból álló, $A_0A_1 \dots A_{r-1}A_r$ nyílt töröttvonal, amelyik egy ponton sem megy át egynél többször. Az A_0A_1 egyenes határolta egyik félsíkba esik az egész töröttvonal, így nem mehet át a töröttvonal az ellenkező oldalra eső félsík belsejében levő sokszögcúcsokon, és ugyanez mondható az $A_{r-1}A_r$ egyenesről is (4. ábra). Ez a két átló nem metszi egymást, így az A_i csúcsok a sokszög kerületének az egyenesek közötti két szakaszán helyezkednek el.

Ha n páratlan, $n = 2m + 1$, akkor a kizárt sokszögcúcsok száma legalább $2(m - k)$, a töröttvonalak száma legfeljebb $n - 2(m - k) = 2k + 1$, és így a töröttvonal $r \leq 2k$ szakaszból áll.

Ha az oldalszám páros, $n = 2m$, akkor a berajzolt leghosszabb átló hossza $m - 1$, a legrövidebbé $m - k$. A fenti gondolatmenettel ezért csak $r \leq 2k + 1$ adódik, így gondosabban szemügyre kell venni a konstrukciót.

Ha valamelyik íven van két szomszédos csúcs, akkor az ezeken átmenő egyenesnek a másik oldalán, mint amelyiken a másik ív van, nem lehet csúcsa a töröttvonalnak. Ekkor

$$r + 1 \leq n - 3(m - k - 1), \quad \text{vagyis} \quad r \leq 2k + (k + 2 - m) \leq 2k$$

az előrebocsátott megjegyzés szerint.

Ha viszont a csúcsok felváltva a két íven vannak (a töröttvonal „cikkcakkban” halad), és pl. az A_0A_1 egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalára a sokszög kerületének a felénél nagyobb része, tehát legalább m csúcsa esik, akkor a töröttvonal csúcsainak száma legfeljebb $k + 1$, mivel az $A_{r-1}A_r$ egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalán legalább $m - k - 1$ csúcs van (5. ábra).

Ha a sokszög középpontja a két átló egyenese közt, tehát valamelyik $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ háromszögben van (6. ábra), akkor az A_i -vel szemközti sokszögcúcs nem lehet a töröttvonal csúcsa, így a töröttvonalnak legfeljebb

$$2m - 2(m - k - 1) - 1 = 2k + 1$$

csúcsa lehet, s így legfeljebb $2k$ átlóból állhat.

Megjegyzés. A gondolatmenet pontosabb elemzésével belátható, hogy zárt töröttvonalat is megengedve az eljárás csak hatszög és $k = 1$ esetén enged meg 3 ($= 2k + 1$) hosszúságú töröttvonalat, ekkor azonban a 7. ábrán látható ellenpélda szolgáltat megoldást.

Surányi János





