1. Célszerű (a számolás egyszerűsítésére) a sorozat első hat elemét a következő módon jelölni: $a-5t$, $a-3t$, $a-t$, $a+t$, $a+3t$, $a+5t$ (a differencia, $d=2t$). A feltételek szerint $6a=42$, így $a=7$, és $(a-3t)(a+3t)=13$, amiből $t^2=4$, $t=2$ vagy $t=-2$.

Ha $a=7$ és $t=2$, akkor $d=4$ és $a_1=-3$,

ha $a=7$ és $t=-2$, akkor $d=-4$ és $a_1=17$.

2. Legyen $AB=12x$. Jelölje az AB szakasz felezőpontját F, az AC szakasz felezőpontját O_1, a CB szakasz felezőpontját O_2. A három félkört érintő kör középpontja legyen O_3. Tekintsük az O_1O_3F és az O_2O_3F háromszögeket. A C és F pont helyzetéből következik, hogy $O_1O_3=2x+12$, $O_1F=4x$ és $O_3F=6x-12$, illetve $FO_2=2x$, $O_2O_3=4x+12$.

A feladat többféle módszerrel megoldható, most a koszinusztétel alkalmazásával oldjuk meg. Legyen $O_1FO_3\sphericalangle=\alpha$, ekkor $O_2FO_3=180^\circ-\alpha$, és tudjuk, hogy $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$.

$$\cos\alpha=\frac{(4x)^2+(6x-12)^2-(2x+12)^2}{2\cdot 4x\cdot(6x-12)},\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{(2x)^2+(6x-12)^2-(4x+12)^2}{2\cdot 2x\cdot(6x-12)}.$$

Innen $x=7$, így $AB=84$ egység.

3. $x\neq-\dfrac{1}{2}$, $y\neq-\dfrac{1}{2}$. A $2xy+x=y^2+2$, $2xy+y=x^2+2$ egyenletek különbsége $x-y=y^2-x^2$, ami $(x-y)(1+x+y)=0$ alakba írható.

Innen $x=y$ és ekkor $x^2+x-2=0$, $x_1=1$, $y_1=1$ és $x_2=-2$, $y_2=-2$ az egyenletrendszer megoldásai. Más megoldás nincs, hiszen ha $x+y+1=0$, akkor $3x^2+3x+3=0$, amely egyenletnek nincs megoldása a valós számok körében.

4. A háromszög területe $T=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$. A koszinusztételből

$$c^2-a^2-b^2=-2ab\cos\gamma,$$

így a feltétel alkalmazásával $\operatorname{tg}\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma=150^\circ$.

5. a) A kifejezés az $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ számok kivételével minden más valós számra értelmezhető.

b) A megengedett x-ekre $\dfrac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}=2\sin 2x$ és $\cos 4x=1-2\sin^2 2x$. Ezek alkalmazásaval

$$f(x)=(1-\sin 2x)^2+4.$$

$f(x)$ legnagyobb értéke 8, amit akkor vesz fel, ha $\sin 2x=-1$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

$f(x)$ legkisebb értéke 4, amit akkor vesz fel, ha $\sin 2x=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

(Azonos átalakításokkal: $f(x)=4\sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+4$.)

6. 100 000 Ft 24 %-os kamatos kamatozással $100\,000\cdot 1{,}24^3$ Ft-ra növekszik, így a harmadik év végén $100\,000\cdot 1{,}24^3-18\,054{,}4=172\,608$ Ft-ot fizettek vissza. A kamatlábak változása miatt

$$100\,000\cdot 1{,}24\cdot\left(1+\frac{24-p}{100}\right)\left(1+\frac{24-2p}{100}\right)=172\,608,$$

ahonnan

$$p^2-186p+728=0,\qquad p_1=4,\quad p_2=182.$$

A feladat szerint $p<24$, tehát $p=4$.

7. A keresett kör középpontja rajta van az $y=8$ egyenletű egyenesen, s ha középpontjának az abszcisszája u, akkor a sugara $r=|12-u|$, tehát az egyenlete

$$(x-u)^2+(y-8)^2=(12-u)^2.$$

Mivel ez a kör érinti az $x^2+y^2=16$ egyenletű kört, azért a két kör egyenlete által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla. A két egyenlet különbsége:

$$-2ux-16y=64-24u,$$
$$8y=12u-32-ux,$$
$$64x^2+(12u-32-ux)^2=64\cdot 16,$$

$$(64+u^2)x^2-2u(12u-32)x+\big((12u-32)^2-64\cdot 16\big)=0.$$
$$D=4u^2(12u-32)^2-4(64+u^2)\,\big((12u-32)^2-64\cdot 16\big)=0;$$

Innen $u=0$ vagy $u=6$.

A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$x^2+(y-8)^2=12^2 \qquad \text{vagy} \qquad (x-6)^2+(y-8)^2=6^2.$$

8. Az egyenletnek $x=2p$ és $x=-2p$ nem lehet megoldása.

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-4p^2)-tel, majd rendezzük az egyenletet:

$$(p-2)x=p^2+2p.$$

Ha $p=2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.
Ha $p\neq 2$, akkor

$$x=\frac{p^2+2p}{p-2}$$

lehet a megoldás, de $\dfrac{p^2+2p}{p-2}\neq 2p$, és $\dfrac{p^2+2p}{p-2}\neq -2p$, azaz $p\neq 0$, $p\neq 6$, $p\neq \dfrac{2}{3}$, azaz ha $p\neq 2$, $p\neq 0$, $p\neq 6$, $p\neq\dfrac{2}{3}$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása az

$$x=\frac{p^2+2p}{p-2}.$$

Ha $p=0$, $p=2$, $p=6$ vagy $p=\dfrac{2}{3}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

$\dfrac{p^2+2p}{p-2}<2p$ pontosan akkor teljesül, ha $0<p<2$ vagy $p>6$.

Rábai Imre