

I. kategória: SzakközépiskolákElső (iskolai) forduló

1. Legyenek a, b, c rögzített valós számok, és legyen $c > 0$. Határozza meg az

$$f(x) = (a-x)^2 + (b-x)^2 - (2-c)x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

függvény szélsőértékét!

2. Adott egy a élhosszúságú kocka. Két szomszédos csúcán át olyan gömb halad, amely érinti az ezen csúcsok egyikére sem illeszkedő kockalapokat.

Mekkora ennek a gömbnek a sugara?

3. A $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ valós számok számtani sorozatot alkotnak. Határozza meg a sorozat elemeit, ha

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = b_1 b_2 b_3 = b_5 b_6.$$

4. Bizonyítsa be, hogy bármilyen pozitív egész n -re az

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

összeg nem végződik a 2, 4, 7, 9 számjegyek egyikére sem!

5. Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a $BAC \sphericalangle = 36^\circ$. Az $ABC \sphericalangle$ szögfelezője az AC oldalt a D pontban metszi. Legyen az ABC háromszög köré írt kör középpontja O_1 , a BCD háromszög köré írt kör középpontja O_2 , és az ABD háromszög köré írt középpontja O_3 .

- a) Bizonyítsa be, hogy az $O_1 O_2 O_3$ háromszög hasonló a DBA háromszöghöz!
b) Számítsa ki az $O_1 O_2 : O_2 O_3$ arány pontos számértékét!

6. Milyen valós x értékek elégítik ki a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{1}{\cos 3x \cos 4x} + \frac{1}{\cos 4x \cos 5x} = 0.$$

Második forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$$

egyenletet!

2. Az ABC derékszögű háromszögbe rajzoljunk egy olyan félkört, amelynek középpontja az AB átfogón van, és amely érinti a befogókat. Jelölje ennek a sugarát r , a háromszög körülírt körének sugarát R , a két középpont távolságát d .

Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

3. Egy háromszög α, β, γ szögeire fennáll a

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$$

egyenlőség. Igazolja, hogy ekkor a háromszög egyik szöge 120° .

4. Igazolja, hogy nincs olyan pozitív egészekből álló számtani sorozat, amelynek 5 egymás utáni eleme teljesítené a következő feltételek mindegyikét:

- a) a középső szám prímszám
b) a két legnagyobb szám négyzetének összege egyenlő a másik három szám köbének összegével.

5. Legyen az $n \geq 2$ és egész szám. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3 + 1}{3^3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} < \frac{3}{2}.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\log_2 \left(\log_3 \frac{x-1}{x+1} \right) < \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} \right).$$

2. Jelöljük az ABC háromszög súlypontját S -sel, az AS szakasz felezőpontját P -vel, a háromszög területét T -vel és a háromszög köré írt kör sugarát R -rel. Igazolja, hogy

$$PB^2 + PC^2 - 2PS^2 \geq 2 \cdot \sqrt[3]{2T^2 \cdot R^2}.$$

3. Határozza meg azokat a háromjegyű természetes számokat, amelyeknek pontosan 10 darab (természetes szám) osztójuk van, és ezen osztók reciprokának összege 2.

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x \cdot \sqrt{y^2 - 4} + 2x^2 - x = 1, x^2 - 4x - \sqrt{2y - y^2} = -3.$$

2. A 6, 8, 16, 14, 7, 9, 18, 16, ... számsorozatot a következőképpen képezzük:

a 2., 6., ..., $(4k+2)$ -edik tagja az előtte álló tagnál 2-vel nagyobb;
a 3., 7., ..., $(4k+3)$ -adik tag az előtte álló kétszerese;
a 4., 8., ..., $(4k+4)$ -edik tag az előtte állónál 2-vel kisebb; végül
az 5., 9., ..., $(4k+5)$ -ödik tag az előtte állónak a fele ($k \geq 0$, egész)
Szerepel-e a sorozat tagjai között 1995, ha igen, milyen sorszámmal?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y pozitív egész számok, akkor

$$x^2 + y^2 + x + y$$

nem lehet egyenlő 10 egyetlen pozitív egész kitevős hatványával sem.

4. Az ABC háromszöget beírt körének középpontjára tükrözve az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha ABC oldalainak hossza a , b és c , akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ közös részét képező hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint

$$\frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

5. Egy egységnyi élű tömör szabályos tetraéderből mindegyik csúcsánál levágunk egy $\frac{1}{n}$ élhosszúságú szabályos tetraédert, ahol n 1-nél nagyobb egész szám. Milyen n érték esetén lesz a megmaradó test felszínének és térfogatának hányadosa a lehető legkisebb?

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}-1} (7 - 2\sqrt{x} - x)$$

függvény grafikonjának egyetlen olyan pontja van, amelynek mindkét koordinátája természetes szám.

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek hatszor annyi hattal osztható osztója van, mint hattal nem osztható?

3. Egy ABC háromszög súlyvonalából szerkesztett háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögnek legfeljebb egy szöge lehet 60° -osnál nagyobb.

4. Hány olyan egymással nem egybevágó ötszög létezik, amelyeknek oldalhosszai egymást követő egész számok, négy szögük pedig 120° -os?

Adjuk meg mindegyik ötszögnél az oldalak hosszát és sorrendjét.

Harmadik (döntő) forduló

1. Adott a $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Készítsük el ennek összes részhalmazát. Vegyük egyenként az így kapott halmazokat, és mindegyiknek minden részhalmazát írjuk fel külön-külön egy-egy piros cédulára. Így a piros cédulák között lehetnek olyanok, amelyekre ugyanaz a részhalmaz van felírva, de mindet megtartjuk.

Vegyük most sorra egyesével a piros cédulákat, és a rajtuk levő halmaz minden részhalmazát külön-külön felírjuk egy-egy fehér cédulára.

Vegyük végül sorra a fehér cédulákat, és a rajtuk levő halmaz minden részhalmazát külön-külön felírjuk egy-egy zöld cédulára.

Hány zöld cédulát kell így felhasználnunk?

2. Egy adott gömb köré forgáskúpot írunk; a kúp palástja a gömböt egy k körben, alaplapja pedig egy M pontban érinti; legyen ennek a kúpnak a térfogata V_1 . A gömbbe egy újabb kúpot írunk, amelynek alapköre k , csúcsa pedig M , ennek a térfogata V_2 . Mekkora lehet a $\frac{V_2}{V_1}$ arány legnagyobb értéke?

3. Egy egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszöglemez valamennyi pontját kiszínezzük négy szín valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy bármely színezés esetén van két olyan azonos színű pont, amelyek távolsága legalább $2 - \sqrt{2}$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges részhalmazok egy H véges halmazban. Legyen C_k azon H -beli elemek halmaza, amelyek legalább k darab A_i -ben benne vannak. Bizonyítsuk be, hogy

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_n|.$$

($|X|$ az X halmaz elemszámát jelöli.)

2. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan véges, összefüggő, egyszerű síkgráf létezik, amelynek minden csúcsa ötödfokú. (Egy gráf egyszerű, ha nincs benne hurokél és többszörös él; összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet élsorozat; véges, ha véges sok csúcsa van; síkgráf, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy az élei ne messék egymást; egy csúcs foka a belőle kiinduló élek száma.)

3. Egy egységnyi sugarú zárt körlemez kisebb sugarú egybevágó zárt körlemezekkel fedünk le.

a) Legkevesebb hány lefedő körre van ehhez szükség?

b) A legkevesebb számú körrel történő lefedés esetén mennyi a lefedő körök sugarának a lehetséges minimuma?

4. Legyenek $a \leq b \leq c$ egy háromszög oldalai. Milyen értékeket vehet fel $(a + b + c)^2 / (bc)$?

5. Legyenek k és n pozitív egészek, $n/2 \leq k \leq n$ és $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ tetszőleges egész számok. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $i \leq j$, amelyre $a_i + a_j$ a 2-nek pozitív egész kitevős hatványa.

Második (döntő) forduló

1. Az ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA, AB oldalt rendre az A', B', C' pontokban. Legyen M a beírt kör egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$d(M, AB) \cdot d(M, BC) \cdot d(M, CA) = d(M, A'B') \cdot d(M, B'C') \cdot d(M, C'A'),$$

ahol $d(M, XY)$ jelöli az M pontnak az XY egyenestől mért távolságát.

2. Mutassuk meg, hogy az $n! + 1, \dots, n! + n$ számok mindegyikének van olyan prímosztója, amely a többi $n - 1$ szám egyikének sem osztója.

3. Három hajótörött mindegyike egy-egy órát tölt (egyhezamban) egy szigeten ma délután valamikor 5 és 9 óra között (véletlenszerűen). Ha hármuk közül pontosan kettő fél óránál hosszabb ideig egyszerre tartózkodik ott, akkor vizsály tör ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy békében telik el a mai nap?

Az 1995/96. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny eredményei matematikából

I. kategória (A szakközépiskolák tanulói)

I. díj:Stikkel Gábor IV.o., Eger, Neumann János Közg. Szki. és Gimnázium,
felkészítő tanár: Máté Mihályné

II. díj:Kiss Béla IV.o., Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola,
felkészítő tanár: Ujvári István

III. díj:Bencsik Zoltán IV.o., Székesfehérvár, I. István Kereskedelmi és Közgazd. Szki.,
felkészítő tanár: dr. Tóth Aranka

4.Sebestyén Balázs IV.o., Budapest, Újpesti Műszaki Szakközépiskola és Gimn.,
felkészítő tanár: Gácsér János

5.Brezniczky János III.o., Eger, Gép- és Műszeripari Szakközépiskola,
felkészítő tanár: Girhiny László

6.Szabadi Péter IV.o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.,
felkészítő tanár: Árokszállási Eszter

7.Hegyi Sándor IV.o., Kecskemét, ÁFEOSZ Keresk., Közgazd. Szki.,
felkészítő tanár: Gadányi Csabáné

8.Sitkei Dénes IV.o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki.,
felkészítő tanár: Illés Judit

9.Tajti Imre IV.o., Eger, Egri Közgazdasági Szakközépiskola,
felkészítő tanár: Veres Nándor

10.Ruskó László IV.o., Szolnok, Vásárhelyi P. Közgazd. és Postaforg. Szki.,
felkészítő tanár: Ferdinánd Árpádné

Miniszeri dicséretben részesült:

11. Varga Áron, III.o., Budapest, Trefort Á. Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **12. Inkovics Ferenc**, IV.o., Zalaegerszeg, Csány László Közgazdasági Szki.; **13. Paróczy Szilveszter**, IV.o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki.; **14. Lukács Attila**, IV.o., Gyöngyös, Vak Bottyán J. Ipari Szakközépiskola; **15. Walter Ulrik**, IV.o., Székesfehérvár, I. István Kereskedelmi és Közgazd. Szki.; **16. Gyurkó Zsolt**, IV.o., Nagykanizsa, Cserhádi S. Mezőgazd. és Gépészeti Szki.; **17. Varga Zsolt**, IV.o., Mosonmagyaróvár, Bolyai János Közgazdasági Szki.; **18. Hahner Ferenc**, IV.o., Bonyhád, Perczel Mór Közgazdasági Szakközépiskola; **19. Havasi László**, IV.o., Szeged, Kőrösy J. Közgazdasági és Külker. Szki.; **20. Zaupper Bence**, IV.o., Győr, Krúdy Gy. Gimnázium és Vendégl. Szki.; **21. Pék Ákos**, IV.o., Szombathely, Szombathelyi Közgazdasági Szki.; **22. Csonka Margit**, III.o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. és Külker. Szki.; **23. Szabó Péter**, III.o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.; **24. Dani Hajnalka**, III.o., Szeged, Kőrösy J. Közgazdasági és Külker. Szki.; **25. Lóki Gábor**, IV.o., Paks, Energetikai Szakképzési Int. Műsz. Szki.; **26. Bakondy Péter**, III.o., Eger, Gép- és Műszeripari Szakközépiskola; **27. Ács Gábor**, III.o., Eger, Neumann János Közg. Szki. és Gimnázium; **28. Takács Gábor**, IV.o., Komló, Kazinczy Ferenc Egészségügyi Szki.; **29. Dézsi István**, IV.o., Budapest, Kvassay Jenő Műszaki Szakközépiskola; **30. Pék Tamás**, IV.o., Bonyhád, Perczel Mór Közgazdasági Szakközépiskola.

II. kategória (Nem speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

I. díj:Szabó Jácint III.o., Győr, Révai Miklós Gimnázium,
felkészítő tanár: Zsebők Ottó

II. díj:Pólik Imre III.o., Pannonhalma, Pannonhalmi Bencés Gimnázium,
felkészítő tanár: Binzberger Ákos, Rábai László

III. díj:Nagy Zoltán Zsolt IV.o., Nyíregyháza, Zrínyi Ilona Gimnázium,
felkészítő tanár: Bartha Dénesné, dr. Kiss Sándor

4.Vörös Zoltán IV.o., Tiszavasvári, Váci Mihály Gimnázium,
felkészítő tanár: Maác Ágnes, Vörös Zoltán

5.Rozmán András IV.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium,
felkészítő tanár: Peresztegi László

6.Lovas Rezső IV.o., Debrecen, KLTE Gyakorló Gimnáziuma,
felkészítő tanár: dr. Szekanecz Zoltánné, dr. Kántor Sándor

7.Jerk Balázs IV.o., Tata, Eötvös József Gimnázium,
felkészítő tanár: Édes Zoltán

8.Varga-Haszonits István III.o., Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium,
felkészítő tanár: Lux Judit

9.Burcsi Péter IV.o., Pápa, Türr István Gimnázium és Pedagógiai Szki.,
felkészítő tanár: Németh Zsolt, Spissich László

10. Bartók Gábor III.o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola,
felkészítő tanár: Hegyi Györgyné, Rác János

Miniszeri dicséretben részesült:

11. Veres Tibor, IV.o., Budapest, Zrínyi Miklós Gimnázium; **12. Belasitz Klára**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **13. Tarján Péter**, IV.o., Budapest, Piarista Gimnázium; **14. Pintér Dömötör**, III.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; **15. Kiss Ádám**, IV.o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **16. Puskás Péter**, III.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; **17. Halász Anita**, IV.o., Miskolc, Avasi Gimnázium; **18. Kurucz Zoltán**, IV.o., Szolnok, Varga Katalin Gimnázium; **19. Lestyán Zsolt**, IV.o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; **20. Veress Tamás**, IV.o., Ózd, József Attila Gimnázium és Eü. Szki.; **21. Czeiner Péter**, IV.o., Budapest, Karinthy Frigyes Gimnázium; **22. Járási István**, IV.o., Miskolc, Herman Ottó Gimnázium; **23. Pongrácz Gergely**, IV.o., Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium és Szki.; **24. Röst Gergely**, IV.o., Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium; **25. Miskei Katalin**, IV.o., Tata, Eötvös József Gimnázium; **26. Marossy Kálmán**, IV.o., Kazincbarcika, Ságvári Endre Gimnázium; **27. Megyeri Csaba**, III.o., Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium; **28. Szita István**, III.o., Kőrmend, Kölcsey Ferenc Gimnázium; **29. Balogh Endre**, III.o., Budapest, Szent István Gimnázium; **30. Lolbert Tamás**, IV.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium.

III. kategória (A speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

I. díj: Sánta Zsuzsa IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
felkészítő tanár: dr. Surányi László, Beleznay Ferenc, Dobos Sándor

II. díj: Frenkel Péter III.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
felkészítő tanár: Laczkó László

III. díj: Gröller Ákos IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
felkészítő tanár: dr. Surányi László, Beleznay Ferenc

4. Lakatos Roland IV.o., Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium,
felkészítő tanár: Csizsár Mária, Kiss Zsolt

5. Peltz Csaba IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
felkészítő tanár: dr. Surányi László, Beleznay Ferenc

6. Bárász Mihály IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.,
felkészítő tanár: dr. Surányi László, Beleznay Ferenc, Dobos Sándor

7. Braun Gábor III.o., Budapest, Szent István Gimnázium,
felkészítő tanár: Halek Tamás

8. Héri Géza IV.o., Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimnázium,
felkészítő tanár: Balogh Emil, dr. Kiss Sándor

9. Ugron Balázs IV.o., Veszprém, Lovassy László Gimnázium,
felkészítő tanár: Schultz Zoltán, Arnhoffer Mihály

10. Tóth Gábor Zsolt IV.o., Budapest, Árpád Gimnázium,
felkészítő tanár: Mikusi Imre, Vajda István, Mezei István

Miniszeri dicséretben részesült:

11. Szobonya László, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **12. Király Csaba**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **13. Tóth Péter**, IV.o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; **14. Duzmath Csaba**, IV.o., Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimnázium; **15. Kovács András**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **16. Erdélyi Tibor**, III.o., Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium; **17. Hegedüs Márton**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **18. Berki Csaba**, III.o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium; **19. Makai Márton**, IV.o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium; **20. Kiss László**, III.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **21. Nyakas Péter**, III.o., Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium; **22. Elek Péter**, IV.o., Budapest, Árpád Gimnázium; **23. Kovács Balvin**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **24. Mann Zoltán**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **25. Gosztolya Gábor**, IV.o., Szeged, JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium; **26. Pap Gábor**, IV.o., Budapest, Árpád Gimnázium; **27. Várkonyi Péter**, III.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.; **28. Kiss Márton**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimn.

A Versenybizottságtól kiemelt dicséretet kapott:

100. Lippner Gábor, II.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyakorló Gimn.