

¹A versenyről szeptemberi számunk 337. oldalán olvashattak.

I. évfolyam

1. a) Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor $\frac{7n-1}{4}$ és $\frac{5n+3}{4}$ nem lehetnek egyszerre egész számok.

b) Hány olyan 1996-nál kisebb n természetes szám van, amelyre a $\frac{4n+3}{13n+2}$ tört egyszerűsíthető?

2. A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\{x^2 - 4y + 3 = 0, y^2 - 4z + 3 = 0, z^2 - 4x + 3 = 0.$$

3. Melyek azok az $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények, amelyekre $f(x) + f(g(x)) = x + y$, bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén?

4. Adott egy szabályos 17-oldalú sokszög. Bármely két csúcsát összekötjük egy piros, kék vagy zöld szakasszal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek azonos színű oldalai vannak.

5. Az ABC háromszögben a B és C szögek belső szögfelezőinek talppontját B', C' -vel, a külső szögfelezők metszéspontját I_a -val, míg a háromszög köré írható kör középpontját O -val jelöljük. Igazoljuk, hogy $I_aO \perp B'C'$.

6. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög, $M \in \text{Int}(ABC)$, valamint N és P az M vetületei az AB és AC oldalakra, és D a BC oldal felezőpontja. Igazoljuk, hogy $MN \cdot AC = MP \cdot AB \Leftrightarrow \angle BAM < \angle DAC$.

II. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996 \mid 2557^{2n+1} + 1559^{2n+1} - 4054^{2n+1} - 62^{2n+1}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \arctan \frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\tan(\cot x) \cot(\tan x) \leq 1 \leq \tan(\tan x) \cdot \cot(\cot x).$$

3. Minden $n \geq 1$ egész számra határozzuk meg azt a legnagyobb értéket, amelyet az a szorzat vehet fel, amely szorzat tényezői egészek és a tényezők összege n .

4. Helyezzünk el n pozitív számot egy kör kerületén úgy, hogy egy kivételével mindegyik a vele szomszédos két szám mértani és számtani középarányosa által meghatározott zárt intervallumban legyen. Határozzuk meg a számokat, ha ismerünk egyet közülük!

5. Az ABC háromszögben az A szög belső szögfelezője a háromszög köré írt kört A_1 -ben metszi. Hasonlóan kapjuk a B_1, C_1 pontokat. Igazoljuk, hogy

$$\text{Ter}[BA_1C] + \text{Ter}[CB_1A] + \text{Ter}[AC_1B] = p(R-r), (1) \frac{a^2}{-a+b+c} + \frac{b^2}{a-b+c} + \frac{c^2}{a+b-c} = \frac{2p}{r}(R-r). (2)$$

(Itt $\text{Ter}[XYZ]$ az XYZ háromszög területét jelöli.)

6. Legyen M egy olyan pont a térben, amelynek az $ABCD$ tetraéder AB, BC, CD és DA éleire eső M_1, M_2, M_3 és M_4 vetületei az illető szakaszok belső pontjai. Számítsuk ki az $aM_1A + bM_2B + cM_3C + dM_4D$ összeget (ahol a, b, c és d -vel az AB, BC, CD és DA élek hosszát jelöltük).

III. évfolyam

1. Igazoljuk, hogy $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1996} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1996}$ pozitív egész szám, és adjuk meg a szám utolsó számjegyét.

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^y - x = y^x - y$ egyenletet.

3. Legyen az ABC háromszög AC oldalának A -hoz közelebbi harmadolópontja D , BC oldalának felezőpontja E . Az $ABED$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög és egyben érintőnégyszög is. Jelölje R az ABC háromszög körülírt körének sugarát, és r az $ABED$ négyszög beírt körének sugarát. Határozzuk meg az $\frac{R}{r}$ hányados pontos értékét.

4. Igazoljuk, hogy ha az ABC hegyesszögű háromszögben $a = B$ és $b = A$, akkor $c \leq A \cdot C$ (a, b, c a háromszög oldalainak hossza, A, B, C a háromszög szögeinek mértékei radiánban).

5. Egy $6n \times 6n$ ($36n^2$ négyzetet tartalmazó) négyzetes táblára két játékos felváltva 2×2 -es négyzeteket rak, amelyek nem fedik egymást (egy ilyen négyzet négy mezőt takar). Az veszít, aki már nem tud rakni.

a) Legalább hány lépés után fejeződhet be a játék?

b) Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?

6. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderben G_i -vel jelöljük az A_i -vel szemben fekvő lap súlypontját. Ha egy térbeli M pont esetén $3MG_i = MA_i$ bármely $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ -re, igazoljuk, hogy akkor M a tetraéder súlypontja.

IV. évfolyam

1. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$) az AB és AC szárazakon felvesszük a $D \in (AB)$, illetve $E \in (AC)$ pontot úgy, hogy

$$\left(\frac{\text{Ker}(ADE)}{\text{Ker}(ABC)} \right)^2 = \frac{\text{Ter}(ADE)}{\text{Ter}(ABC)}.$$

($\text{Ker}(XYZ)$ az XYZ háromszög területét jelöli.) Igazoljuk, hogy DE párhuzamos BC -vel.

2. Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek számát:

$$A_n = \{(x, y) | x \neq y \in \mathbf{N}, x, y \in [F_n, F_{n+2}] \text{ és } \exists k \in \mathbf{N} : x + y = F_k\}$$

bármely rögzített n természetes szám esetén (F_n a Fibonacci sorozat n -edik tagja, $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ha $n > 1$.)

3. Mennyi maradékot kapunk, ha az $n^{n+1} + (n+1)^n$ természetes számot elosztjuk $n(n+1)$ -gyel?

4. Legyen $P(x)$ egy valós együtthatójú, n -edfokú polinom. Igazoljuk, hogy a $P(P(P(x))) = 0$ egyenletnek nem lehet egy pontosan $(n^3 - n^2 + 1)$ -szeres gyöke.

5. Egy körvonalat 30 ponttal 30 ívdarabra osztottunk fel úgy, hogy az ívdarabok közül 10-nek a hossza 1, 10-nek a hossza 2, és 10-nek a hossza 3. Bizonyítsuk be, hogy a felvett osztópontok között van legalább kettő, amelyek átmérősen ellentettek (egy átmérő két végpontja).

6. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvény úgy, hogy

$$(f \circ f)(x) = \sqrt[n]{(x+1)^n + 1} \quad (n \geq 2).$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.