[1]B. Cavalieri (1598–1647) a bolognai egyetem tanára volt.

„Helytelen a következő, Cavalieri-féle elvnek mondott kijelentés: ha két testnek egy síkkal párhuzamos metszetei páronként egyenlő területűek, akkor a két test térfogata egyenlő. Ebből a következtetésből még *a térfogat létezése sem következik*.” (idézet Hajós György: Bevezetés a geometriába c. könyv 227. oldaláról.)

Erre fogunk most egy példát mutatni. (A konstrukció Pósa Lajostól származik.)

Vegyünk két egységkockát. Az egyiket hagyjuk meg olyannak, amilyen.

A másikat a következőképpen alakítsuk át: jelöljük B-vel azokat a négyzetlap síkmetszeteket a kockában, amelyek racionális távolságra vannak a kocka kiszemelt alapsíkjától, a többi lapot, vagyis az irracionális távolságra levőket pedig jelöljük J-vel. Most képzeletben fogjuk meg bal kezünkkel a B, jobb kezünkkel a J jelű lapokat; mint ahogyan a krupié összetolja a kártyalapokat, mi húzzuk szét a négyzetlapjainkat annyira, hogy a bal oldalon levő lapok éppen ne legyenek a jobb oldali lapok fölött vagy alatt. Tekintsük most az egységkockát és az általunk konstruált ponthalmazt (*1. ábra*). Mindkettőt az előzőekben kijelölt alapsíkra állítva, az alapsíkkal párhuzamos síkmetszetek egyenlő területűek, de az elsőnek a térfogata 1, míg az általunk konstruált halmaznak nincs térfogata. A térfogat azért nem létezik, mert a ponthalmazba írható téglatest-rendszerek össztérfogatának felső határa nem egyezik meg a lefedő téglatest-rendszerek térfogatának alsó határával. Előbbi 0, utóbbi 2.

Hajós György könyvében található a következő, most már pontos tétel két test térfogatának egyenlőségére:

„Ha két test úgy helyezkedik el egy féltérben, hogy a féltér határsíkja által tartalmazott lapjaiknak s a határsíkkal párhuzamos síkok által kivágott metszeteiknek van területük, és ezek páronként egyenlők, hogy továbbá mindkét testhez található egy-egy egyenes, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testhez tartozó pontjai (amennyiben ilyenek vannak) egy, a féltér határsíkján végződő szakaszt alkotnak, akkor a két testnek van térfogata és térfogatuk egyenlő.”

A tételben szereplő feltételeket gyengíthetjük, ha nem kíánjuk meg, hogy a testeknek legyen közös lapjuk a határsíkkal, és csak annyit követelünk meg, hogy létezzen egy-egy olyan, a határsíkkal nem párhuzamos irány, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testekkel közös része egyetlen szakasz. Ez a feltétel biztosítja a térfogat létezését. Természetes, hogy ellenpéldánk ilyen feltételek mellett már nem működik.

A gömb térfogatának meghatározása e tétel segítségével szintén megtalálható Hajós György könyvében (l. 240. o.). Ehhez nagyon hasonló gondolatmenettel oldjuk meg a következő feladatot.

1. feladat. *Vegyünk két R sugarú, egymást merőlegesen metsző végtelen egyenes körhengert. Határozzuk meg a közös rész térfogatát.*

Megoldás. Vegyük a hengerek tengelyei által meghatározott Σ síkot. Σ szimmetriasíkja a hengereknek, illetve a közös résznek, tehát annak térfogatát felezi. A metszet felének a felülete az építészetből jól ismert *kolostor boltozatnak* nevezett alakzat. Ha a Σ-tól x távolságban levő párhuzamos síkkal elmetsszük a hengereket, akkor a metszetek azonos szélességű végtelen sávok. A sávok merőlegesek egymásra, ezért metszetük négyzet. A négyzet területe $4(R^2 - x^2)$. Keressünk egy olyan testet, amelynek a megfelelő metszetei ugyanilyen területűek, és a térfogatát könnyű meghatározni. $4R^2$-nyi terület adódik egy $2R$ oldalú négyzetes hasáb alappal párhuzamos metszeteként, $4x^2$-nyi terület pedig olyan $2R$ alapélű R magasságú négyzetes gúla alappal párhuzamos metszeteként, amelynek a távolsága a gúla csúcsától x. Mindez annak a középpontos hasonlóságnak a következménye, amelynek középpontja a gúla csúcsa, aránya pedig $x : R$. Ha gúlánkat fejtetőre állítva kivesszük egy R magasságú, $2R$ alapélű négyzetes hasábból (mint léket a dinnyéből), akkor a keresett testhez jutottunk.

A Cavalieri-elv feltételei teljesülnek, ha a Σ síkra állítjuk az előzőekben konstruált testet, és a metszetnek ugyanebben a féltérben levő felét tekintjük (*2. ábra*). A Σ-val párhuzamos metszetek egyenlő területűek, a tételben követelt irány a Σ-ra merőleges, így a térfogat létezése is igazolt, bár ez a metszet térfogatának létezéséből is következik. Így a metszet térfogata $16R^3/3$, nem feledkezve meg arról, hogy csak a metszet felére alkalmaztuk a Cavalieri-elvet. Hasonlóan számolhatjuk a közös rész térfogatát abban az esetben is, ha a tengelyek valamely derékszögtől különböző szöget zárnak be egymással, de ekkor is követelmény az, hogy a tengelyek messék egymást, és a sugarak egyenlők legyenek.

A következő feladatnak szintén van építészeti vonatkozása, mert a jól ismert *keresztboltozat* alatti térfogat is számolható a segítségével.

2. feladat. *Adott két R sugarú, $2R$ alkotójú egyenes körhenger. Tengelyeik merőlegesen metszik egymást a felezőpontjaikban. Számítsuk ki az egyesítésükkel keletkezett test (uniójuk) térfogatát.*

Megoldás. A két henger össztérfogatából kivonva a közös rész térfogatát, megkapjuk a keresett test térfogatát. A közös rész térfogatát az 1. feladatban már meghatároztuk. Így a következő eredmény adódik: $R^3(4\pi - 16/3)$.

Intelligencia tesztekben és építészek, művészettörténészek felvételi vizsgáin lehet találkozni a következő problémához hasonló feladatokkal, amelyeket az ábrázoló geometriában rekonstrukciónak hívnak: Megadják egy test három egymásra merőleges vetületét vagy árnyékát, és kérik, hogy a vetületekből vagy árnyékokból rajzoljuk meg, vagy a megadott válasz lehetőségek közül válasszuk ki a test axonometrikus vagy perspektív képét. (Az előbbi jóval nehezebb.) Egy ilyen probléma a következő: Egy test három egymásra merőleges árnyéka rendre: téglalap, egyenlőszárú háromszög és kör (*4. ábra*). Mi ez a test?

Érdemes a megoldásra egy kis időt szánni. Nem könnyű a feladat. Ha egy R sugarú végtelen egyenes körhengert elmetszünk két, a tengelyét merőlegesen metsző egyenesre illeszkedő síkkal, amelyek egyenlő, mondjuk $45°$-os szöget zárnak be a tengellyel, és egy a tengelyre merőleges síkkal, amely az előbbi síkok metszésvonalától R távolságra van, akkor egy csavarhúzó végéhez hasonló testet kapunk, amelynek árnyékai éppen a felrajzoltak.

3. feladat. *Számítsuk ki e test térfogatát* (5. ábra).

Megoldás. A 2. feladatban leírt test négy „csavarhúzóból" áll, úgy, hogy $2R$ hosszú éleiket egymáshoz illesztjük. A térfogat tehát az előző feladatban szereplő test térfogatának negyede, azaz $R^3(\pi - 4/3)$.

Érdekes tulajdonságú felület a következő: vegyünk egy $ABCD$ szabályos tetraédert, melynek AB élén kijelölünk egy tetszőleges X pontot és CD élén egy Y pontot, úgy, hogy $AX = CY$. Ha X befutja az AB élet, akkor az XY szakasz egy felületet ír le. Az így kapott felület egy hiperbolikus paraboloid része. Ez a felület különleges tulajdonságokkal rendelkezik. A felületen egyenes, hiperbola és parabola seregek találhatók. Az $ABCD$ tetraéderből, a BC és az AD élek elhagyásával az $ABDC$ torznégyszöget kapjuk (*6. ábra*).

Ha egy ilyen torznégyszög alakú keretet szappanos vízbe mártunk, akkor az előbbi felületet kapjuk a keret élei között; ez egy fizikai alátámasztása annak a ténynek, hogy ez a keretre illeszthető felületek közül a legkisebb felszínű. Ez a felület is elterjedt századunk építészetében. Nevezzük felületünket nyereglapnak, mert hasonló a négyzet alakú lópokróchoz, amelynek átlóját a ló gerincére illesztve a nyereg alá tesznek.

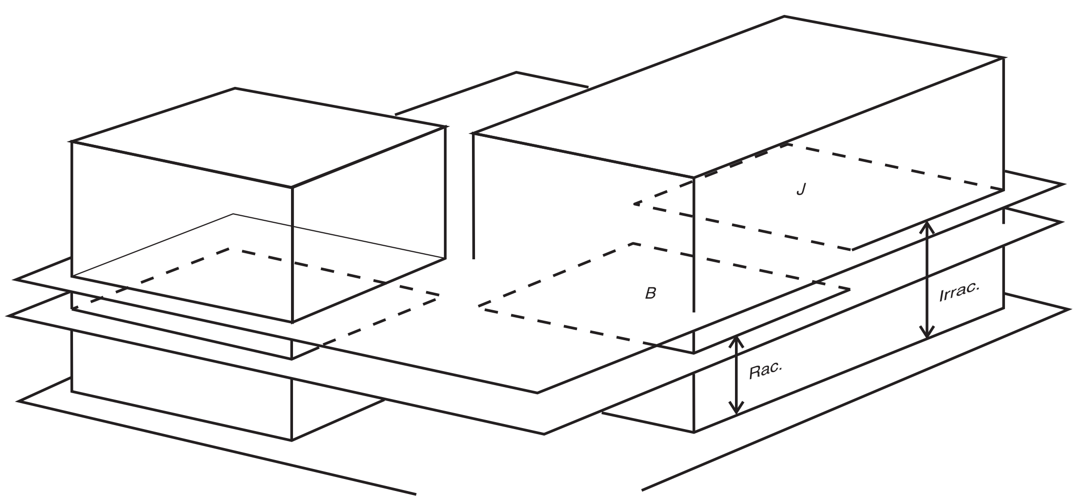
4. feladat. *Adott az $ABCD$ tetraéder, valamint az $ABDC$ torznégyszöghöz illeszkedő nyereglap. Határozzuk meg az ABC, BCD lapok, valamint a nyereglap által meghatározott test térfogatát.*

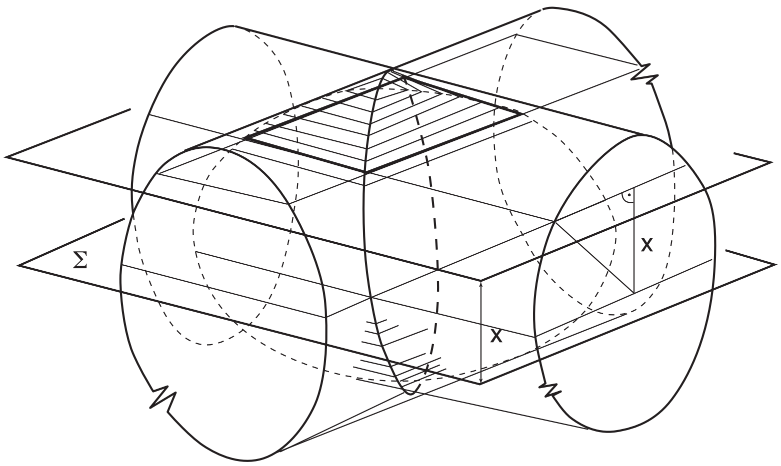
Megoldás. Vegyünk egy az AC, BD egyenesekkel párhuzamos S síkot. Az S-sel párhuzamos síkok testünket XZY derékszögű háromszögekben metszik. Ugyanis XZ párhuzamos AC-vel és YZ párhuzamos BD-vel, de AC és BD merőlegesek, ezért XZ és YZ is merőlegesek egymásra. Egy ilyen derékszögű háromszögnek a területe fele azon téglalap területének, amelyet az S-sel párhuzamos sík az $ABCD$ tetraéderből metsz ki. Jelöljük A'-vel AC felezőpontját! Az $A'BCD$ tetraéder S síkkal párhuzamos síkmetszetei már egyenlő területűek a vizsgált testünk síkmetszeteivel (*7. ábra*). A Hajós-féle tételben követelt egyeneseket nem tudunk megadni, mivel a testeknek nincs olyan lapja, amely párhuzamos S-sel. A tétel után tett megjegyzésben követelt egyenes viszont létezik, ilyen az S-re merőleges egyenes. Mivel az $A'BCD$ tetraéder térfogata fele az eredeti tetraéder térfogatának, ezért a nyereglap által határolt test térfogata is a tetraéder térfogatának fele, azaz $\sqrt{2}a^3/12$, ahol a az eredeti szabályos tetraéder élhossza.

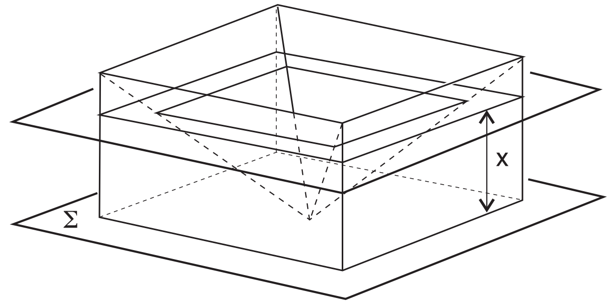
Ezt a feladatot egy ügyes transzformációval (az eredmény ismeretében) már egyszerűbben is megoldhatjuk. Keresendő olyan egybevágósági transzformáció. amely a nyereglapot helyben hagyja, az ABC, BCD lapokat pedig a BAD, ADC lapokba viszi át. Az AB és CD élek felezőpontját összekötő egyenesre való tükrözés e kívánalmaknak éppen megfelel. Ha erre az egyenesre tükrözzük testünket, akkor az egy vele egybevágó testbe megy át, és a két test együtt az eredeti tetraédert adja. Térfogatuk tehát a tetraéder térfogatának a fele.

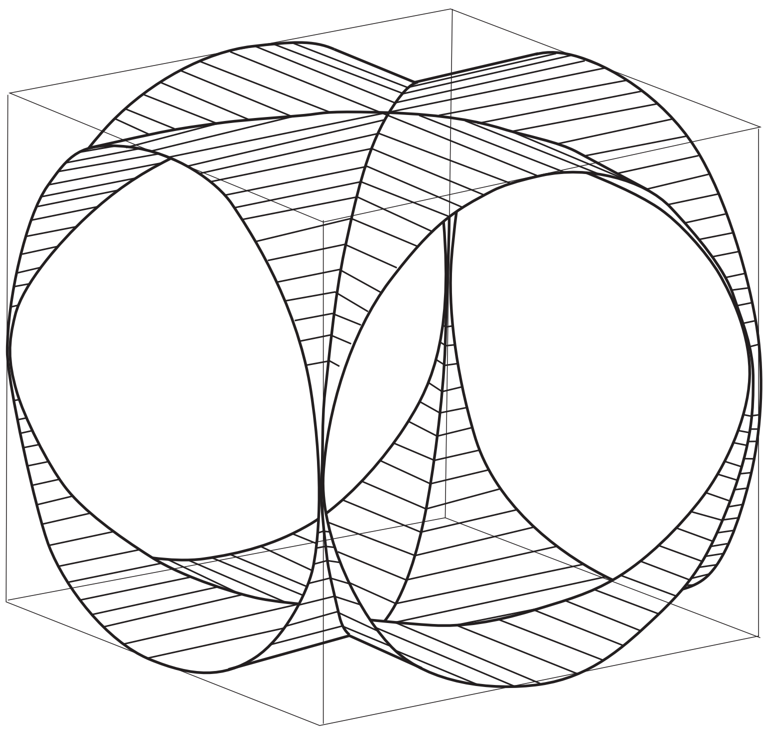
Nagy Gyula

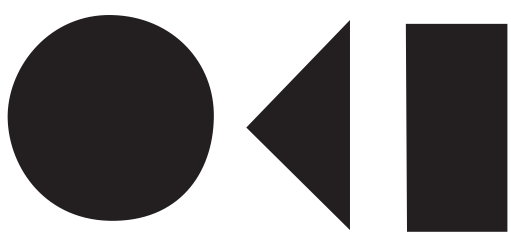
Budapest, Ybl Miklós Műsz. Főisk.

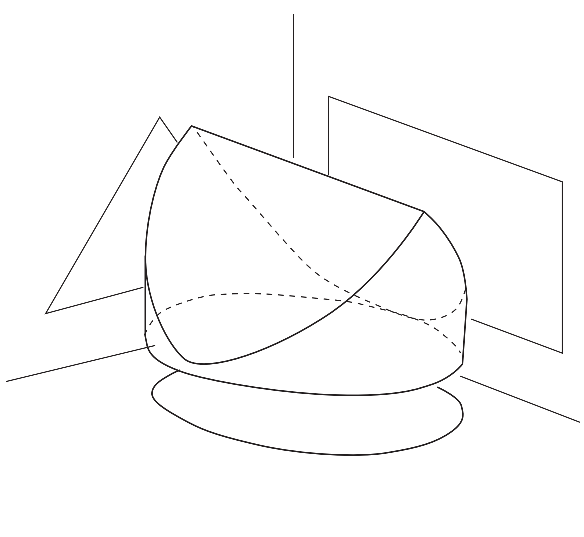


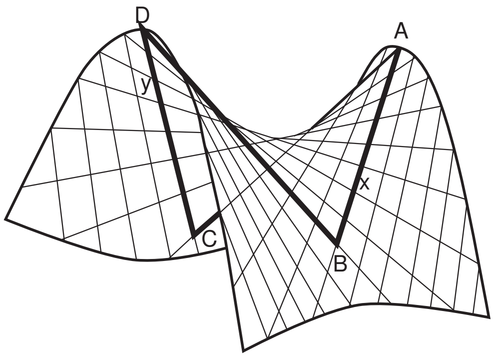

Σ
x
x

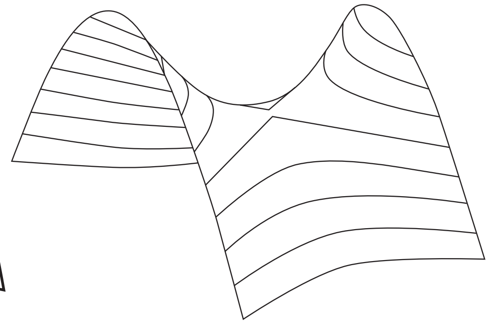

x
Σ

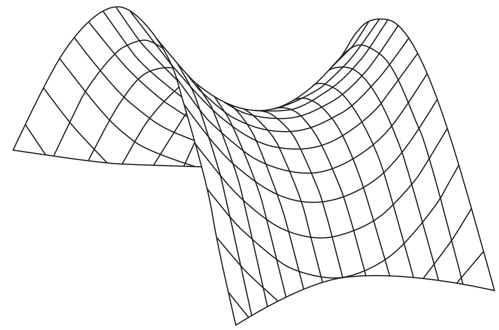


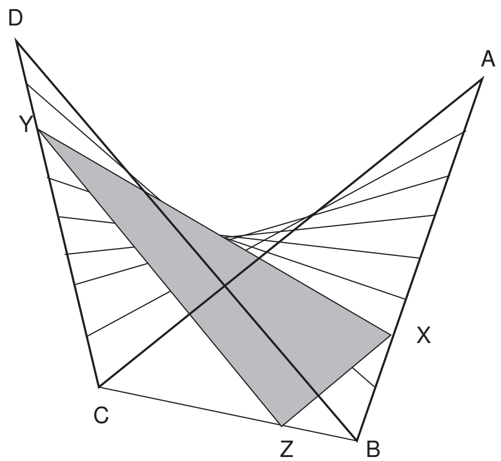


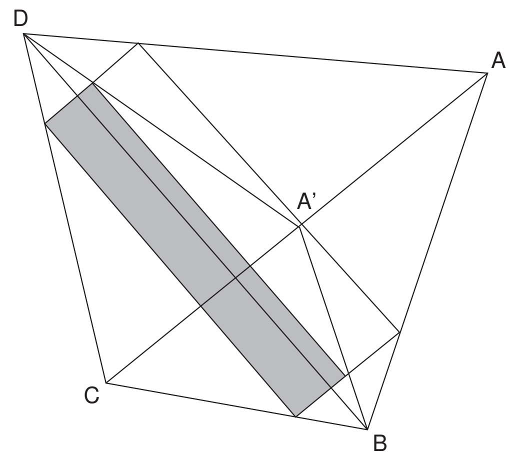



D
A
y
x
C
B






D
A
Y
X
C
Z
B


D
A
A’
C
B