1. $f_1(x) = x^2 - 9x - 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} = (x-11)(x+2)$.

$f_1(x)$ értelmezési tartománya: $f_1(x)$értelmezési tartománya: $x \in \mathbf{R}$.$f_1(x)$értékkészlete:$f_1(x) \geq -\frac{169}{4}$ és $f_1(x) \in \mathbf{R}$.

$f_2(x)$értelmezési tartománya: $x \in \mathbf{R}$.$f_2(x)$értékkészlete:$f_2(x) \geq 0$ és $f_2(x) \in \mathbf{R}$.

$f_3(x)$értelmezési tartománya: $x \leq -2$ vagy $11 \leq x$.$f_3(x)$értékkészlete:$f_3(x) \geq 0$ és $f_3(x) \in \mathbf{R}$.

$f_4(x)$értelmezési tartománya: $x < -2$ vagy $11 < x$.$f_4(x)$értékkészlete:$f_4(x) \in \mathbf{R}$.

2. Legyen a két gyök r_1 és r_2. Ekkor

$A_1 + A_2 = 6\pi r_1^2 + 6\pi r_2^2 = 6\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) = 6\pi\left[(r_1+r_2)^2 - 2r_1r_2\right] = 6\pi(100 - 2\cdot 21) == 348\pi, V_1 + V_2 = 2\pi r_1^3 + 2\pi r_2^3 = 2\pi\left(r_1^3 + r\right.$

Felhasználtuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggést, aminek alapján $r_1 + r_2 = 10$, $r_1 \cdot r_2 = 21$.

3. Az értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Egy egyenlőtlenségnek mind a két oldalát pozitív mennyiséggel szorozhatjuk. Szorozzunk a következő kifejezéssel:

$$\left(\sqrt{x+1}+2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+4\right),$$

ami biztosan pozitív. Háromszor alkalmazva az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ összefüggést, kapjuk:

$$(x+1-4)(x+3-9)(x+5-16) \geq 0, (x-3)(x-6)(x-11) \geq 0.$$

Az előjel viszonyokat számegyenesen ábrázolhatjuk. A megoldás: $3 \leq x \leq 6$ vagy $11 \leq x$. Ezek az értékek az értelmezési tartományban is benne vannak.

4. Az a egyenes normálvektora $(2;1)$, a b egyenesé $(-1;2)$, vagyis a háromszög (ha létezik), akkor derékszögű. Az a és b egyenesek egyenleteiből kapjuk: $B(-6;3)$, a b és a c egyenesek egyenleteiből kapjuk: $A(2;-3)$. Az AB szakasz felezőpontja $F(-2;0)$. A köré írt kör sugara: $r = \frac{AB}{2} = 5$. A kör egyenlete: $(x+2)^2 + y^2 = 25$.

Tudjuk, hogy $t = \frac{ab}{2}$ (derékszögű háromszög), valamint $t = r_0 s$, ahol r_0 a beírt kör sugara, s pedig a félkerület. Az a és a b metszéspontjait kiszámolva: $C(-2;-5)$. Két pont távolsága számolható, ha adottak a koordináták: $AC = b = 2\sqrt{5}$, $BC = a = 4\sqrt{5}$, $AB = c = 2r = 10$. Így $s = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 3\sqrt{5}$, $t = \frac{ab}{2} = 20$, vagyis $r_0 = \frac{20}{5+3\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - 5$.

5. Tegyük az S, Z, L pontokat derékszögű koordináta-rendszerbe oly módon, hogy $S(-1;0)$, $L(1;0)$ legyen, $Z(x,y)$ pedig a mozgó pont. Ekkor $s^2 = SZ^2 = (x+1)^2 + y^2$, $l^2 = LZ^2 = (x-1)^2 + y^2$. Tudjuk, hogy $2s^2 + 4 = l^2$, vagyis $2\left[(x+1)^2 + y^2)\right] + 4 = (x-1)^2 + y^2$. Rendezve: $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$, ami $(x+3)^2 + y^2 = 4$.

A Z pontok egy meghatározott körön helyezkednek el. A gondolatmenetet megfordítva beláthatjuk, hogy a körnek minden pontja eleget tesz a feltételeknek.

6. Mivel $-17\sin^2 x = \sin^2 x - 18\sin^2 x$, ezért az egyenletet felírhatjuk a következő alakban:

$$36\sin^4 x - 12\sin^3 x + \sin^2 x - 18\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0, \quad \text{azaz}$$
$$\left(6\sin^2 x - \sin x\right)^2 - 3\left(6\sin^2 x - \sin x\right) + 2 = 0,$$

amiből $6\sin^2 x - \sin x = 1$, illetve $6\sin^2 x - \sin x = 2$. Ezeket az egyenleteket megoldva a következő értékeket kapjuk $\sin x$-re: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$. Így a megoldások: $x_1 = -19^\circ\ 28' + k_1 \cdot 360^\circ$, $x_2 = 30^\circ + k_2 \cdot 360^\circ$, $x_3 = 41^\circ\ 45' + k_3 \cdot 360^\circ$, $x_4 = -30^\circ + k_4 \cdot 360^\circ$, $x_5 = 199^\circ\ 28' + k_5 \cdot 360^\circ$, $x_6 = 150^\circ + k_6 \cdot 360^\circ$, $x_7 = 138^\circ\ 28' + k_7 \cdot 360^\circ$, $x_8 = 210^\circ + k_8 \cdot 360^\circ$.

7. Legyen $c = \frac{1}{n(n+1)}$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, de $n \neq -1; 0$. Ekkor $x = y + \frac{1}{n(n+1)}$, amit a másik egyenletbe beírunk: $y^2 + \frac{1}{n(n+1)} \cdot y - \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Írjuk fel a diszkriminánst:

$$D = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{4}{n(n+1)} = \frac{1 + 4(n^2+n)}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)^2.$$

Így már látható, hogy y racionális lesz, valamint x is. Az állítás megfordítása nem igaz. Egy ellenpélda: $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$; $3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

8. $\dfrac{V}{A}=\dfrac{\pi r^2 m/3}{\pi r(a+r)}=\dfrac{7}{4}$. Elvégezve a műveleteket: $4rm=21a+21r$. Tudjuk, hogy $a^2=r^2+m^2$, így $4rm-21r=21\sqrt{r^2+m^2}$. Láthatóan $m\ge 6$. Emeljünk négyzetre és rendezzünk: $16r^2m-168r^2-441m=0$. Ezt írhatjuk a következő alakban is: $(4r^2)\cdot\left(m-\dfrac{21}{2}\right)=441m$, amiből $m\ge 11$, egyébként a bal oldal negatív lenne, a jobb oldal pedig pozitív.

$$(4r)^2=\frac{882m}{2m-21}=\frac{441(2m-21)+9261}{2m-21}=441+\frac{9261}{2m-21}=441+\frac{3^3\cdot 7^3}{2m-21}.$$

Mivel $m\ge 11$, azért $2m-21>0$, ami azt jelenti, hogy $2m-21$ a $3^3\cdot 7^3$ pozitív osztóival lehet egyenlő, de ekkor a $\dfrac{3^3\cdot 7^3}{2m-21}$ értéke is ezen pozitív osztók közül kerül ki: 1, 7, 49, 343, 3, 21, 147, 1029, 9, 63, 441, 3087, 27, 189, 1323, 9261. Ezekhez 441-et adva négyzetszámot, $(4r)^2$-et kell kapnunk. A négyzetszámok 0, 1, 4, 5, 6, 9 végződésűek lehetnek, így a felsoroltakból nyolc marad. Ezeket behelyettesítve csak $343+441=784=28^2$, $r=7$ adódik. ($1323+441=1764$ is négyzetszám, de nem $(4r)^2$ alakú, hiszen nem osztható 16-tal.) Ha $\dfrac{3^3\cdot 7^3}{2m-21}=343$, akkor $2m-21=27$, amiből $m=24$, $a=25$.

Számadó László