

Az idei magyar–izraeli matematikaversenyt március 24. és 31. között az izraeli Haifában rendezték, közelebbről Izrael legrégebbi egyetemén, a Technionban. Hagyományos módon az első nap egyéni verseny volt, 4 feladattal, 4 óra munkaidővel, a második nap pedig csapatverseny – egy csapat tagjai közösen dolgoztak előre megadott témából. Idén ez a téma gráfelmélet volt. Itt 6 feladatot kellett a csapatoknak 4 óra alatt megoldani. Az egyéni versenyen minden feladat helyes megoldása 7 pontot ért. A magyar versenyzők közül *Burcsi Péter* és *Gyarmati Katalin* a maximálisan megszerezhető 28 pontot érte el, *Bárász Mihály* eredménye 23 pont, *Gröller Ákos* pontszáma pedig 16 volt. Burcsi a pápai Türr István Gimnázium IV. osztályos tanulója, a többiek a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályába járnak. Az izraeli versenyzők pontszámai rendre 28, 15, 8, 8 voltak. Összesítésben tehát a magyar csapat 95:59 arányban győzött. A magyar csapat vezetője *Pelikán József*, az izraelié *Shay Gueron* volt.

A csapatversenyben hagyományosan nem hirdetünk formális eredményt, csak bejelentjük, hogy melyik csapat milyen teljesítményt nyújtott. A magyar csapat a 6-ból 5 feladatot oldott meg, az izraeli 2-t. (A 3. feladatot nem oldotta meg egyik csapat sem.) A feladatok szövegét alább közöljük.

A magyar csapatnak a csapatversenyen elért jó eredménye nem kis mértékben annak köszönhető, hogy 3 héten keresztül igen alapos felkészítésen vettek részt. Naponta felváltva tartott nekik foglalkozást *Fleimer Tamás*, *Győri Ervin*, *Lukács András* és *Montágh Balázs*. Segítségüket ezúton is szeretném megköszönni. A felkészítés alapja egyébként *Lovász László* klasszikus, "Combinatorial Problems and Exercises" című könyvének 6–10. fejezete volt. Külön köszönet illeti *Reiman Istvánt* és *Benczúr Pétert*, akik az egész tanév során rendszeresen tartottak foglalkozásokat egy bővebb keretnek, amiből azután a 4 utazó versenyző kikerült.

Az izraeli rendezők gazdag programról gondoskodtak. A haifai városnézés és múzeumlátogatások mellett kirándulást tettünk többek között Akkóba (a kereszties lovagok utolsó erősségébe), valamint a római kori Judea provincia székhelyére, Caesereába, ahol a régészek az utóbbi években grandiózus romokat tártak fel. Baráti légkörű záróbankett egészítette ki a programot.

A jövő évi versenyt ismét Magyarország rendezi.

Pelikán József

1996. évi magyar–izraeli matematikaverseny feladatai

Egyéni verseny

1. Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ sorozatot, amelyre teljesül

$$\sum_{k=1}^{1997} 2^{k-1} x_k^{1997} = 1996 \prod_{k=1}^{1997} x_k$$

2. Legyen n pozitív egész szám és tegyük fel, hogy n^2 előáll, mint két szomszédos pozitív egész köbének a különbsége. Bizonyítsuk be, hogy n előáll két négyzet összegeként. Bizonyítsuk be, hogy ilyen n valóban létezik.

3. Tegyük fel, hogy egy konvex poliéder semelyik csúcsára sem igaz, hogy pontosan 3 él indul ki belőle. Bizonyítsuk be, hogy a poliédernek legalább 8 háromszög-lapja van.

4. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges valós számok és $b_1, b_2, \dots, b_n$ olyan valós számok, amelyekre teljesül az $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ feltétel. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $k \leq n$ pozitív egész, amire teljesül

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|.$$

Csapatverseny

1. Egy G gráfnak 20 pontja van, nem tartalmaz háromszöget és minden pont foka osztható 4-gyel. Mennyi G éleinek maximális száma?

2. Legyen G egy n csúcsú gráf ($n > 1$). Tegyük fel, hogy minden pont foka $\geq (n-1)/2$. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy, kevesebb, mint $1 + \log_2 n$ csúcsból álló S halmaz, úgy, hogy minden S -en kívüli csúcshoz legalább egy S -beli csúcsból vezet él.

3. k milyen értékeire teljesül az, hogy minden összefüggő, k -reguláris páros gráf tartalmaz Hamilton-kört?

4. Adott egy irányított gráf és annak két különböző s és t csúcsa. Tegyük fel, hogy minden pont be-foka egyenlő a pont ki-fokával, továbbá, hogy minden t -t tartalmazó, de s -et nem tartalmazó csúcshalmazra igaz az, hogy az ebbe a halmazba belépő élek száma legalább k . Bizonyítsuk be, hogy s és t között van $2k$ darab élidegen irányított út úgy, hogy közülük k darab s -ből t -be, a másik k darab pedig t -ből s -be vezet.

5. Az 1000 csúcsú és 100 élű utat nem tartalmazó gráfok közül melyiknek van a legtöbb éle?

6. Jelöljük $f(k)$ -val a k csúcsú és 100 élű utat nem tartalmazó *összefüggő* gráfok élszámának a maximumát. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan c_1 és c_2 konstansok, hogy

$$49 \cdot k - c_1 \leq f(k) \leq 49 \cdot k + c_2 .$$

Keressünk minél jobb értékeket c_1 -re és c_2 -re, ami érvényes

(a) k minden értékére;

(b) kellően nagy k értékekre.