„A labda gömbölyű” hallhatjuk esélytelen csapatok szurkolóitól a futballmeccsek előtt. Mint tudjuk, a focilabda szabályos ötszögletű és szabályos hatszögletű bőrdarabokból van összevarrva. Ha a bőrdarabokat nyújthatatlannak képzeljük, akkor azokból nem állítható elő egy gömbfelület. A jelenleg elfogadott labdákat ugyanis egy síklapokkal határolt testből konstruálták. Egy ilyen testnek minden csúcsánál egy szabályos ötszög és két szabályos hatszög találkozik egymással, ezt jelöljük a címben is látott (5, 6, 6) szimbólummal. Ez a cikk megadja ennek a testnek az előállítását, amelyből a test merőleges vetülete is megszerkeszthető.

Vegyünk egy $A'B'C'D'E'F'G'H'$ kockát. A kocka tetszőleges síkra való merőleges vetületének megszerkesztése megtalálható a legtöbb ábrázoló geometria könyvben[1]ld. pl. Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria (Tankönyvkiadó, Budapest, 1957), ezért erre itt nem térünk ki. A kocka egy csúcsából kiinduló három élét tekintsük tengelykeresztnek, ennek alapján lehet megszerkeszteni a kocka $ABCDEFGH$ merőleges vetületét (*1. ábra*).

Amennyiben a kocka $A'C'F'H'$ csúcsai által meghatározott szabályos háromszöglapú testet tekintjük, akkor egy szabályos tetraédert kapunk. Ennek négy csúcsa, négy lapja és hat éle van. Merőleges vetületének szerkesztése a kocka merőleges vetületéből egyértelmű. A szabályos tetraéder hat élének felezéspontja egy szabályos oktaédert ad. Ezek a pontok azonosak a kocka lapközéppontjaival. Ez fordítva is igaz. Az oktaéder lapközéppontjai egy kockát határoznak meg. Ilyenkor mondjuk, hogy a két test *duálisa* egymásnak. Az oktaéder nyolc szabályos háromszöglapból áll és tizenkettő éle van. Merőleges vetületének szerkesztése a tetraéder merőleges vetületéből úgy történik, hogy annak éleit felezzük (a merőleges vetítés aránytartása miatt).

Az oktaéderből származtatunk egy tizenkét csúcsú szabályos háromszöglapokból álló testet, amelyet *ikozaéder*nek hívnak. Milyen arányban osszuk fel az oktaéder éleit, hogy ikozaédert kapjunk? Ha felezzük az éleket, akkor a lapokon szabályos háromszögek, ellenben a csúcsoknál négyzetek keletkeznek. Így a felezéspontok nem adják a keresett testet. Ha az oktaéder háromszöglapjainak éleit körbejárjuk, és az éleket valamilyen $\lambda \neq \frac{1}{2}$ arányban felosztjuk, figyelembe véve, hogy a körbejárás szerint előbb a nagyobb darabot vesszük, akkor a keletkezett pontok háromszöglapú testet szolgáltatnak. Ezek a háromszögek azonban nem mind szabályosak, csak azok, amelyek az eredeti oktaéder lapjain vannak. Az oktaéder csúcsainál keletkező két háromszög ugyan egybevágó és egyenlő szárú, de csak egy bizonyos λ-nál szabályos. Mielőtt λ-t meghatároznánk, megmutatjuk, hogy az oktaéder élei körbejárhatók a kívánalmaink szerint. Egy ilyen Euler-vonalat, bejárást mutatnak a *2. ábra* nyilai. Válasszuk egységnek az oktaéder élhosszát, ekkor a hosszabb éldarab hossza λ, a rövidebbé $1-\lambda$. Az oktaéder egyik csúcsánál a két $1-\lambda$ hosszúságú szakasz darab egymásra merőleges. Ezek tehát egy derékszögű háromszöget alkotnak. Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogója azonos a korábban említett egyenlő szárú háromszög alapjával. Ugyanennek az egyenlő szárú háromszögnek a szára egy λ, $1-\lambda$ oldalú 60°-os szöget bezáró háromszögnek a harmadik oldala. Azt akarjuk, hogy az egyenlő szárú háromszögünk szabályos legyen. A koszinusztételből:

$$2(1-\lambda)^2 = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 - 2\lambda(1-\lambda)\frac{1}{2},$$

amiből

$$0 = \lambda^2 + \lambda - 1 \qquad \text{azaz} \qquad 1 = \lambda + \lambda^2,$$

ezért

$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1},$$

ami a jól ismert aranymetszés aránya. Szerkesztése a körre vonatkozó hatványból, vagy érintőszárú kerületi szögek segítségével a *3. ábrából* leolvasható.

A fentiek szerint, ha az oktaéder éleit bejárjuk, és a bejárás szerint az aranymetszés arányában osztópontokat képezünk, akkor az osztópontok egy szabályos háromszögekből álló 12 csúcsú, 30 élű, 20 lapú testet, úgynevezett ikozaédert határoznak meg (*4. ábra*). Az ikozaéder merőleges vetületének szerkesztése az oktaéder-élek bejárásával kezdődik, majd az éleket a bejárásnak megfelelően aranymetszet arányban felosztjuk. Elég egy aranymetszetet szerkeszteni, és utána használhatjuk a párhuzamos szelők tételét. (Mivel eddig tárgyaltunk négy szabályos testet, illik hogy szót ejtsünk az ötödikről is, bár ezt nem használjuk a továbbiakban. Ez a test a dodekaéder. Az ikozaéder lapközéppontjai adják a dodekaéder csúcsait. Ezért e két test szintén duálisa egymásnak. A tetraédernek önmaga a duálisa.)

A kitartó olvasó már a megoldás küszöbén van, ne csüggedjen, folytassa tovább! Mivel az ikozaéder egy csúcsánál öt szabályos háromszög találkozik, ezért a csúcsok lemetszésével ötszögeket kapunk. A hatszögeknek pedig a háromszöglapokon kellene keletkezni. Kérdés: Hol vegyük fel az ikozaéder élein a pontokat, hogy a pontok egy szabályos ötszögekből és hatszögekből álló testet adjanak? Vagyis pongyolán fogalmazva: Szerkesszük meg a focilabdát!

Kis gondolkodás után beugrik a megoldás. Kérem az olvasótól, hogy szánjon a megoldásra néhány percet.

Igen, a megoldás valóban az éleken felvett két harmadolópont. Így a 60 csúcs által meghatározott test (poliéder) szerkesztése sem nehéz, hiszen csak az ikozaéder éleit kell harmadolni, és a megfelelő pontokat összekötni (*5. ábra*).

Érdekes, hogy poliéderünk megalkotása egy komoly tudósokból álló csapatnak is hosszú töprengést okozott, amikor a közelmúltban felfedezett új szénmódosulatot, a C–60-at próbálták elképzelni. Lehet, futballistáink technikai hátránya is annak következménye, hogy a focilabda nem gömb.

11

Az ikozaéder fenti származtatását egyetemista koromban Hortobágyi Istvántól hallottam, köszönet érte. A cikkben bizonyítatlan állítások precíz indoklása megtalálható pl. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába c. könyvében.

Nagy Gyula tanár, Szent István Gimnázium, Budapest