

Versenyeken – a KöMaL-ban is – gyakran kell olyan egyenlőtlenséget igazolni, amelyben egy háromszög oldalhosszai szerepelnek. Ezeknek a feladatoknak a megoldásakor általában nemcsak azt kell felhasználni, hogy az oldalak hossza pozitív, hanem azt is, hogy teljesül a háromszög-egyenlőtlenség; ez összesen hat feltétel. Ha a bizonyítandó egyenlőtlenség bonyolult, a lehetőségek száma olyan nagy lesz, hogy a néhány soros megoldás megtalálása, ha egyszerűen csak próbálgatással dolgozunk, nagyon hosszú időbe telik.

Például egyszer a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt az az egyenlőtlenség, hogy ha a , b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$(1) \quad a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

A versenyen az akkori magyar csapatból ezt senki sem tudta bebizonyítani, pedig a feladatra létezik rövid megoldás: könnyen ellenőrizhető, hogy a bal oldalon álló mennyiség nem más, mint

$$\frac{(b+c-a)(c+a-b)(b-c)^2 + (c+a-b)(a+b-c)(c-a)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(a-b)^2}{2}.$$

A kérdés csak az: hogyan lehet egy ilyen megoldást megtalálni?

Most egy olyan módszert szeretnék vázolni, amivel a kiindulási feltételek számát hatról háromra csökkentjük. Ez nem oldja meg automatikusan a feladatot, de sok esetben könnyebben felismerhetővé teszi a megoldást.

Legyenek a háromszög oldalai a , b , c , félkerülete s . Legyen $x = s - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $y = s - b = \frac{1}{2}(c + a - b)$ és $z = s - c = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Ismeretes, hogy ezek a mennyiségek azoknak a szakaszoknak a hosszai, amelyekre a beírt kör érintési pontjai az oldalakat felosztják, azaz $a = y + z$, $b = z + x$ és $c = x + y$ (ez egyszerű behelyettesítéssel is igazolható). Az x , y , z mennyiségek pozitívak. Ez a feltétel, ami valójában három egyenlőtlenséget jelent, ekvivalens azzal, hogy a , b , c pozitív, valamint $a > b + c$, $b > c + a$ és $c > a + b$. Ha a , b , c helyére behelyettesítjük $(y + z)$ -t, $(z + x)$ -et és $(x + y)$ -t, akkor a feladatot egy olyan egyenlőtlenség bizonyításává alakíthatjuk át, amely már nem egy háromszög oldalairól, hanem három közönséges pozitív számról szól.

Ezzel a módszerrel (1) így alakul:

$$\begin{aligned} (y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) &\geq 0; \\ xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^2yz - y^2zx - z^2xy &\geq 0; \\ xy(y-z)^2 + yz(z-x)^2 + zx(x-y)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésig minden számolás mechanikus, csupán a négyzetösszeggé alakítás megtalálásához kell egy kicsit gondolkodni.

A háromszögnek sok más adata is kifejezhető x , y , z segítségével. Például a félkerület $s = x + y + z$, a terület a Héron-képletből $t = \sqrt{xyz(x+y+z)}$, a beírt kör sugara $r = \frac{t}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$, a körülírt kör sugara $R = \frac{abc}{4t} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$.

Gyakorlás céljára néhány feladat:

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{27}{8} \leq \frac{(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 4.$$

2. Igazoljuk, hogy $R \geq 2r$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $3(a+b)(b+c)(c+a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 18abc$.

4. Legyenek a háromszög súlyvonalai s_a , s_b , s_c . Igazoljuk, hogy

$$\left(s_a - \frac{|b-c|}{2}\right) \cdot \left(s_b - \frac{|c-a|}{2}\right) \cdot \left(s_c - \frac{|a-b|}{2}\right) \leq st.$$