

Az 1993. februári számban jelent meg a következő feladat: *Van-e olyan 2-hatvány, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja az 1, 9, 9, 3 jegyekkel kezdődik?*

**I.** Idézzük föl mindenekelőtt a feladat megoldását. Olyan  $n$  és  $k$  pozitív egészeket keresünk, amelyekre

$$(1) \quad 1993 \cdot 10^k \leq 2^n < 1994 \cdot 10^k$$

teljesül. Mindkét egyenlőtlenség mindkét oldalának a 10-es alapú logaritmusát véve és rendezve, (1) a következő alakba írható:

$$\log 1993 \leq n \cdot \log 2 - k < \log 1994,$$

ill. figyelembe véve, hogy  $\lfloor \log 1993 \rfloor = \lfloor \log 1994 \rfloor = 3$ ,

$$\{\log 1993\} \leq n \cdot \log 2 - (k + 3) < \{\log 1994\}$$

(itt  $\{\alpha\}$  az  $\alpha$  szám tört részét jelöli); azaz

$$(2) \quad 0,2995072987 \approx \{\log 1993\} \leq \{n \cdot \log 2\} < \{\log 1994\} \approx 0,2997251539.$$

Válasszunk először egy olyan  $m$  természetes számot, amelyre  $\frac{1}{m} < \{\log 1994\} - \{\log 1993\}$ ; pl.  $m = 10000$  megfelelő.

Az  $\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right)$  intervallumok ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) száma  $m$ , és ezek együttesen lefedik a  $[0, 1)$  intervallumot. Így a  $\{\log 2\}, \{2 \cdot \log 2\}, \dots, \{(m+1) \cdot \log 2\}$  számok között (amelyek páronként különbözőek log 2 irracionálisága miatt) lennie kell két olyannak, amelyek ugyanabba az  $\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right)$  intervallumba esnek. Tehát léteznek olyan  $1 \leq a < b \leq m+1$  egészek, hogy  $|\{a \cdot \log 2\} - \{b \cdot \log 2\}| < \frac{1}{m}$ . Ebből már könnyen belátható olyan  $c$  pozitív egésznek a létezése, amelyre  $\{c \cdot \log 2\} < \frac{1}{m}$ . Egy ilyen  $c$  számnak pedig nyilván létezik olyan  $n$  többsége, ami eleget tesz (2)-nek.

**II.** A felidézett bizonyítás csupán annyit használt fel a feladat szereplőiről, hogy log 2 irracionális; így a megfelelő állítás igaz marad 1993 helyett tetszőleges számjegysorozatra<sup>1</sup> Egy példa a  $\pi$  első három jegyére:  $2^{41745} = 10^{12566} \cdot 3.14173 \dots$ . Azt sem nehéz megmutatni, hogy végtelen sok, az (1) követelményt kielégítő  $n$  szám létezik. A létezés igazolása után nézzünk most néhány konkrét kitevőt is a megfelelők közül. Némi próbálgatás után számológéppel könnyen megtalálhatjuk az alábbi értékeket:

$$2^{12621} = 10^{3799} \cdot 1,993311971 \dots, (A) 2^{14757} = 10^{4442} \cdot 1,993636670 \dots, (B) 2^{16893} = 10^{5085} \cdot 1,993961422 \dots; (C)$$

Az ötödik számjegyet figyelve látható, hogy a 2 kitevőjét 2136-osával növelgetve viszonylag hamar elérhetjük, hogy a hatvány 1, 9, 9, 6-tal kezdődjön:  $2^{16893+k \cdot 2136}$  értéke  $k = 7$  mellett

$$2^{31845} = 10^{9586} \cdot 1,996236116 \dots,$$

és még a  $k = 8$  és  $9$  is jó.

Az eredeti kérdésre visszatérve, az ott bemutatott 12621-es kitevőnél kisebb is található:

$$(D) \quad 2^{1456} = 10^{438} \cdot 1,993763709 \dots,$$

bár ez az előzőekhez képest egy „magányos” megoldás. Ha azonban megengedünk negatív hatványkitevőt is, akkor a kitevőnek a bevált 2136-tal való csökkentése itt is eredményre vezet:

$$2^{-680} = 10^{-205} \cdot 1,99343899 \dots, 2^{-2816} = 10^{-848} \cdot 1,993114323 \dots$$

**III.** Ábrázolhatjuk a feladatbeli problémát (a természetesen adódó számegyenes helyett) a síkon is, a következőképpen. Vegyünk fel a síkon egy szokásos derékszögű koordinátarendszert, jelöljük ennek alapvektorait  $\mathbf{i}$ -vel és  $\mathbf{j}$ -vel. Tekintsük ezután azt a pontrácsot, amelyet az  $\mathbf{u} = (\log 2)\mathbf{i}$  és a  $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$  alapvektorok feszítenek ki. Ebben egy  $n\mathbf{u} + k\mathbf{v}$  helyvektorú rácpont  $(n, k)$  koordinátái pontosan akkor elégítik ki (2)-t, ha a pont benne van abban az  $y$  tengellyel párhuzamos keskeny sávban, amelyet az

$$x = \log 1993 = 3,2995072 \dots$$

és az

$$x = \log 1994 = 3,2997251 \dots$$

egyenletű egyenesek határolnak. Az **I.**-ben leírt megoldás eredménye itt úgy fogalmazható meg, hogy a sávban létezik (még hozzá a megoldást követő megjegyzés szerint végtelen sok) rácpont. Az (A), (B), (C)-beli példáknak megfelelő rácpontok egyetlen rácsegyenesen vannak rajta, amelynek a meredeksége alig 0,022 szögmásodperccel tér el a 90 foktól. Az érdeklődő Olvasó kiszámolhatja, vajon az (A), (B), (D) valamint a (B), (C), (D) rácsháromszögekben van-e további rácpont.