1. Oldja meg a valós számpárok halmazán az $x+y-\sqrt{x+y}=2,\ \ x^3+y^3=40$ egyenletrendszert.

2. Igazolja, hogy minden valós $(x;y)$ számpárra

$$x^2+y^2+1\geq x+y+xy.$$

Mikor egyenlő a két kifejezés?

3. Tekintsük az $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$ kifejezést.
a) Igazolja, hogy $f(x)$ minden valós x-re értelmezhető, és mindig pozitív értéket vesz fel.
b) Határozza meg $f(x)$ lehetséges értékeinek halmazát.
c) Igazolja, hogy $f(x)$ grafikonját megkephatjuk a $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ grafikonjának egy $\mathbf{v}$ vektorral való eltolásával. Mi ez a $\mathbf{v}$ vektor?

4. Bizonyítsa be, hogy ha $\sin(\alpha-\beta)=0$, akkor $\sin(2\beta-\alpha)=\sin\alpha$. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása?

5. Az ABC háromszögben $AB=c$, $AC=b$ egység és $BAC\sphericalangle=\alpha$. Igazolja, hogy ha a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hossza s_a, akkor

$$s_a^2=\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

6. Egy számsorozat első tagja $a_1=4$ és minden $n\geq 1$-re $a_{n+1}=2a_n-1$. Írja fel a sorozat n-edik elemét és az első n elemének összegét n függvényeként.

7. Tekintsük az $(x+8)^2+(y-12)^2=100$ és az $(x-4)^2+(y+4)^2=100$ egyenletű köröket. Igazolja, hogy a két kör érinti egymást. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelyik mindkét kört a közös érintési pontban érinti, és érinti az x tengelyt is.

8. Tekintsük az $f(x)=px^2-(5p+1)x+5$ kifejezést, ahol p valós paraméter.
A p értékétől függően mikor vesz fel a $]2;4[$ (nyílt) intervallumban az $f(x)$ kifejezés csak pozitív, és mikor csak negatív értékeket?

Rábai Imre