

1. Egy rács téglalapot, amelyiknek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, $1/2$ területű rácsháromszögekre bontunk. Bizonyítandó, hogy a háromszögek között legalább kétszer annyi derékszögű van, mint a téglalap rövidebb oldalának hossza. (Egy sokszög rácssokszög, ha valamennyi csúcsának mindkét koordinátája egész szám.)

Megoldás. A bizonyításhoz előre bocsátunk két észrevételt.

1. Egy rácsháromszög területének kétszerese, például a koordináta geometria területképletéből láthatóan, egész szám. Így az $1/2$ területű rácsháromszögek nem tartalmaznak rácspontot a belsejükben, de a csúcsaikon kívül a határukra sem – azt fogjuk mondani, üresek – hiszen különben fel lehetne bontani őket három, illetőleg két rácsháromszögre, s így kétszeres területük 1-nél nagyobb volna.¹

2. Az $1/2$ területű derékszögű rácsháromszögek befogóinak a hossza 1, és a befogók párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, mert egyrészt a szorzatuk a háromszög kétszeres területét adja, másrészt két rácspont távolsága nagyobb mint 1, kivéve, ha egyik koordinátájuk megegyezik, a másik pedig 1-gyel különbözik. Ez azonnal következik a Pitagorasz-tételből.

A feladat állításának bizonyításához először egyes háromszögeket kisebb kerületűvel helyettesítünk, de úgy, hogy fél négyzet ($1/2$ területű derékszögű rácsháromszög) ne keletkezzék. Ehhez azt vegyük észre, hogy ha két közös oldalú, üres rácsháromszög együtt konvex négyszöget alkot, akkor ez paralelogramma (1. ábra). Valóban, az ilyen négyszög területe $1/2 + 1/2 = 1$, mindkét átló két – legalább, tehát pontosan $1/2$ területű rácsháromszögre bontja, területét felezi, ami azt jelenti, hogy a négyszög paralelogramma. Ha ennek az átlói egyenlők volnának, akkor a négyszög téglalap volna. Így az eredeti két háromszög, mivel területük $1/2$, fél négyzet. A fél négyzeteket azonban nem változtatjuk meg.

Nem változtatjuk meg azokat a háromszögeket sem, amelyekből a leírt módon két fél négyzet keletkeznék, vagyis a keletkező paralelogramma rövidebb átlója merőleges az egyik párhuzamos oldalpárra. Az ilyen paralelogramma keletkeztethető egy fél négyzetből úgy, hogy azt az egyik befogó középpontjára tükrözzük (2. ábra). Ekkor a hosszabb átló hossza $\sqrt{5}$. Nevezzük a továbbiakban az ilyen paralelogrammákat rövidnek.

Ha van a háromszögdalok közt $\sqrt{5}$ -nél hosszabb, akkor egy maximális hosszúságú oldalra támaszkodó két háromszögre alkalmazhatjuk a leírt eljárást, mert a háromszögekben ezen az oldalon hegyesszög van, mivel a legnagyobb szög a legnagyobb oldallal van szemben. Így a két háromszög együtt konvex négyszöget alkot. Mivel az előforduló legnagyobb rácstávolságból indultunk ki, és a két átló nem egyenlő hosszú, így a másik átló meghúzásával kisebb kerületű háromszögeket kapunk.

Az eljárás véges sok lépésben befejeződik, mert az oldalhosszak négyzete pozitív egész szám, és nem nagyobb a téglalap átlójánál, továbbá mindegyik csak véges sokszor léphet fel. Elég tehát a feladat állítását olyan téglalapokra belátni, amelyek fél négyzetekre és rövid paralelogrammákra vannak felbontva.

Vegyük a téglalap egyik oldalának két szomszédos rácspont közti szakaszát és a felbontásnak azt a sokszögét, amelyiknek ez az egyik oldala. Ha ez háromszög, akkor megállunk, ha rövid paralelogramma, akkor ennek a tengellyel párhuzamos másik oldalára támaszkodó sokszöget vesszük. Az eljárást addig folytatjuk, amíg háromszöghöz vagy a téglalaphoz a kiindulási oldalával szemközti oldalához nem érünk. Az első esetben a háromszög egyik befogója a téglalap kiindulási oldalával párhuzamos, így a háromszögnek nem lehet közös oldala a téglalap párhuzamos oldalával.

A második esetben a téglalaphoz a kiindulási oldallal szomszédos oldalától indulva ki egy egységnyi szakaszból ugyanez az eset csak úgy léphetne fel, ha a két sokszögsorozatnak volna közös rövid paralelogrammája. Ez azonban nem lehetséges, mert az egyik és a másik sorozat rövid paralelogrammáinak a koordinátatengellyel párhuzamos oldala egymásra merőleges (3. ábra).

A leírt eljárás tehát minden esetben legalább kétszer annyi derékszögű üres rácsháromszöget szolgáltat, mint a téglalap valamelyik oldalának a hossza. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

2. Adott egy n változós polinom. Tudjuk, hogy ha mindegyik változója helyébe vagy $+1$ -et, vagy -1 -et helyettesítünk, értéke pozitív lesz, amennyiben a -1 -ek száma páros, és negatív, ha a -1 -ek száma páratlan. Igazoljuk, hogy a polinom legalább n -edfokú. (Azaz van olyan tagja, amelyikben a változók kitevőinek az összege legalább n .)

Előrebocsátunk egy megjegyzést. Elég olyan polinomokra szorítkozni, amelyekben minden változó legfeljebb első hatványon szerepel. Ha ugyanis minden páros hatványon szereplő változót 1-gyel, a páratlan hatványon szereplőket pedig a változó első hatványával helyettesítjük, ezzel a polinom foka nem növekszik, a feladatban megadott tulajdonsága pedig nyilvánvalóan megmarad, és ezen az sem változtat, ha a módosítás után összevonható tagokat összevonjuk. Ha pedig a módosított polinom legalább n -edfokú, akkor az eredeti is. A továbbiakban polinomnak mindig a mondott módon egyszerűsített polinomot értünk².

I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy egyváltozós polinom $ax + b$ alakú. Feltétel szerint

$$a + b > 0, \quad -a + b < 0, \quad \text{azaz} \quad a - b > 0,$$

tehát

$$2a > 0, \quad a > 0.$$

¹ Bár a megoldás során nem lesz rá szükség, megjegyezzük, hogy ennek az állításnak igaz a megfordítása is: minden üres háromszögnek $1/2$ a területe. Ld. idevonatkozóan: Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J.: *Matematikai Versenyfeladatok* II. rész (Tankönyvkiadó, Budapest 1988) 107–117. oldal.

² Elmondhatók volnának megoldásaink nélkül az egyszerűsítés nélkül is, csak a szöveg válnék sokkal bonyolultabbá.

A polinom tehát elsőfokú. (Az eredeti polinom legalább elsőfokú.)

Tegyük fel, hogy a legfeljebb m változós polinomokra igaz a feladat állítása. Egy $m + 1$ változós polinom

$$f_1(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}f_2(x_1, \dots, x_m)$$

alakban írható, ahol f_1 és f_2 legfeljebb m -változós polinom. Legyen $c_1, \dots, c_m$ egy $+1$ -ekből és -1 -ekből álló sorozat. Ha a c_i -k közt páros számú -1 van, akkor x_{m+1} -nek egyszer $+1$, egyszer -1 értéket adva, a feltétel szerint

$$f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) > 0 \quad f_1(c_1, \dots, c_m) - f_2(c_1, \dots, c_m) < 0.$$

Az utóbbit így írhatjuk:

$$-f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) > 0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1, \dots, c_m) > 0;$$

ha pedig a c_i -k között a -1 -ek száma páratlan, akkor

$$f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) < 0, \quad f_1(c_1, \dots, c_m) - f_2(c_1, \dots, c_m) > 0,$$

tehát

$$-f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) < 0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1, \dots, c_m) < 0.$$

Azt kaptuk, hogy f_2 -nek is megvan a tételben megfogalmazott tulajdonsága, s így az indukciós feltétel szerint legalább m -edfokú, az eredeti polinom legalább $(m + 1)$ -edfokú. Ezzel beláttuk, hogy a tétel állítása minden n -re igaz.

II. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Az, hogy egy polinom n -nél alacsonyabb fokú, azt jelenti, hogy nincs benne mindegyik változót tartalmazó tag. Tegyük fel, hogy egy ilyen polinomra teljesülnének a feladat feltételei. Képezzük az összes $+1$ -ekből és -1 -ekből álló sorozatokon vett értékeit a polinomnak, és a pozitív értékek U összegéből vonjuk le a negatív értékek V összegét. Nyilvánvalóan $U - V > 0$. Nézzük meg, hogy egy $ax_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}$ tag együtthatója ($j < n$) hányszor szerepel U -ban és hányszor V -ben. A $+1$ -ekből és -1 -ekből álló $c_1, c_2, \dots, c_n$ sorozatokban, rögzítve $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_j}$ értékét, ha

$$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_j} = 1,$$

akkor a annyszor szerepel U -ban, ahányféleképpen a többi c -k közt páros számú -1 fordulhat elő. Ez a szám

$$r = \binom{n-j}{0} + \binom{n-j}{2} + \binom{n-j}{4} + \dots,$$

ahol az összeg addig tart, amíg az alsó páros szám nem nagyobb $(n-j)$ -nél; V -ben pedig annyszor, ahányféleképpen a többi c -k közül páratlan számút lehet kiválasztani. Ez a szám pedig

$$s = \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{3} + \binom{n-j}{5} + \dots$$

A kiszemelt tag adaléka az $U - V$ különbséghez tehát a binomiális tétel szerint

$$a(r - s) = a \left\{ \binom{n-j}{0} - \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{2} - \binom{n-j}{3} + \dots \right\} = a(1 - 1)^{n-j} = 0.$$

Ha viszont

$$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_j} = -1,$$

akkor $-a$ szerepel U -ban s -szer, V -ben pedig r -szer, így ekkor is 0 a tag adaléka az $U - V$ különbséghez. Mivel ez az indirekt feltevés szerint a polinom minden tagjára teljesülne, így ellentmondásra jutottunk azzal, hogy ez a különbség pozitív. A polinomban tehát szerepelnie kell az $x_1x_2\dots x_n$ tagnak nemnulla együtthatóval. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3. Az A, B, C, D pontok közül semelyik három nincs egy egyenesen. Az AB és CD egyenesek E -ben, a BC és DA egyenesek F -ben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az AC, BD és EF átmérőjű körök vagy egy ponton mennek át, vagy közülük semelyik kettőnek nincs közös pontja.

Megoldás. A pontokat A -ból hozzájuk mutató helyvektoraikkal jellemezzük. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Ezek nem párhuzamosak, tehát a sík vektorai felírhatók egyértelműen ezek számszorosainak összegeként. Így

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} = \beta\mathbf{b} + \delta\mathbf{d}$$

alkalmas β, δ számokkal.

Mivel E az AB és a CD egyenesen van, F az AD és a BC egyenesen, így

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{AE} = \varepsilon \mathbf{b} = \lambda \mathbf{d} + (1 - \lambda) \mathbf{c} = (1 - \lambda) \beta \mathbf{b} + ((1 - \lambda) \delta + \lambda) \mathbf{d}, \mathbf{f} = \overrightarrow{AF} = \varphi \mathbf{d} = \mu \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c} = ((1 - \mu) \beta + \mu) \mathbf{b} + (1 - \mu) \delta \mathbf{d}.$$

Itt λ és μ nem lehet sem 0 sem 1, mert E különbözik C -től és D -től, F pedig B -től és C -től, különben A , C és D , illetőleg A , B és C egy egyenesen volna. Az előállítások egyértelműségéből következik, hogy

$$\varepsilon = (1 - \lambda) \beta, \quad \delta = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \varphi = (1 - \mu) \delta, \quad \beta = \frac{\mu}{\mu - 1},$$

amiből

$$\varepsilon = \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1}, \quad \varphi = \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1}.$$

Ezeket felhasználva

$$(1) \quad \mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{b} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \mathbf{d}, \quad \mathbf{e} = \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{f} = \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1} \mathbf{d}.$$

Egy $\mathbf{p}$ helyvektorú P pont akkor van az egyes körökön, ha a belőle a megfelelő átmérő végpontjaihoz mutató vektorok merőlegesek, azaz 0 a skaláris szorzatuk³. A feladatban szereplő körök ezért így jellemezhető

$$\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{c}) = \mathbf{p}^2 - \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{p} \mathbf{b} - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \mathbf{p} \mathbf{d} = 0, (\mathbf{p} - \mathbf{b})(\mathbf{p} - \mathbf{d}) = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \mathbf{b} - \mathbf{p} \mathbf{d} + \mathbf{b} \mathbf{d} = 0, (\mathbf{p} - \mathbf{e})(\mathbf{p} - \mathbf{f}) = \mathbf{p}^2 - \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1} \mathbf{p} \mathbf{b} - \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1} \mathbf{p} \mathbf{d} = 0.$$

Jelöljük a bal oldalakat K_{AC} , K_{BD} , K_{EF} -fel. A feladatot megoldottuk, ha sikerül olyan 0-tól különböző α , γ , η számokat találjunk, amelyekre azonosan teljesül, hogy

$$(2) \quad \alpha K_{AC} + \gamma K_{BD} + \eta K_{EF} = 0,$$

mert ekkor, ha egy P pontra valamelyik két kifejezés 0, akkor a harmadik is, tehát ha P valamelyik két körön rajta van, akkor a harmadikon is.

K_{AC} -ben nem szerepel $\mathbf{b} \mathbf{d}$ -s tag, így bármi is az α , a második kifejezés $\lambda \mu$ -szöröséhez a harmadik -1 -szeresét adva az összegben ilyen tag nem fog szerepelni. Az összeghez az első kifejezés $(1 - \lambda \mu)$ -szörösét adva $\mathbf{p}^2$ sem fog szerepelni az összegben. Tehát az $\alpha = 1 - \lambda \mu$, $\gamma = \lambda \mu$, $\eta = -1$ választással a $\mathbf{p}^2$ -es és a $\mathbf{b} \mathbf{d}$ -s tagok kiesnek, továbbá a $-\mathbf{b} \mathbf{p}$ és a $-\mathbf{d} \mathbf{p}$ együtthatója (2) bal oldalán

$$(1 - \lambda \mu) \frac{\mu}{\mu - 1} + \lambda \mu - (1 - \lambda) \frac{\mu}{\mu - 1} = \frac{\mu}{\mu - 1} (1 - \lambda \mu + \lambda(\mu - 1) - 1 + \lambda) = 0;$$

illetőleg

$$(1 - \lambda \mu) \frac{\lambda}{\lambda - 1} + \lambda \mu - (1 - \mu) \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} (1 - \lambda \mu + \mu(\lambda - 1) - 1 + \mu) = 0.$$

K_{AC} szorzója, $\alpha = 0$ lehetne, ha $\lambda \mu = 1$ volna, de ez sem lehetséges. Ha ugyanis ez állna fenn, akkor $\mathbf{c}$ (1)-beli előállításában a második törtet λ -val egyszerűsítve azt kapnánk, hogy

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{b} + \frac{1}{1 - \mu} \mathbf{d} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{d} = \mu \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c}.$$

Ez azt jelentené, hogy D egybeesnék E -vel, és így egy egyenesen lenne B -vel és C -vel a feladat feltételével ellentétben. Ezzel a feladat állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladatot vektorszámítással megoldó versenyzők többnyire azt számolták ki, hogy ha egy P pontra két egyenlet teljesül, akkor a harmadik is. Ekkor vagy három esetet kell külön-külön végigszámolni, vagy az igényel külön magyarázatot, hogy miért szimmetrikus a három kör szerepe.

2. A feladat megoldható projektív geometriai ismeretek alapján is⁴. Egy ilyen megoldásnak csak röviden vázoljuk a menetét. Ha R , S , T , U egy egyenes négy különböző pontja, akkor az RT/TS arányt, ezt pozitívnak tekintve, ha a két szakasz egyirányú, negatívnak, ha ellentétes irányú, a három pont osztóviszonyának nevezzük, és (RST) -vel jelöljük. Az $(RST)/(RSU)$ arány a négy pont kettősviszonya, jelölése $(RSTU)$. Ez akkor negatív, ha az R , S és a T , U pontpár elválasztja egymást.

Ha a kettősviszony értéke -1 , akkor azt mondjuk, hogy a négy pont harmonikus pontnégyes, illetőleg R , S és T , U harmonikusan választja el egymást⁵.

³ Vektorokra vonatkozóan lásd pl. Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J.: *Matematikai Versenykérdések* II. rész (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988) 37–47. old.; különösen e) pont, 43–44. old.

⁴ A bizonyítás nélkül felhasználandó ismeretekre vonatkozóan Hajós Gy. *Bevezetés a geometriába* c. könyvére fogunk utalni (Tankönyvkiadó, Budapest, 1960). A projektív geometria egy minimális feltételekre alapozott (a távolság, szög, folytonosság fogalmát nem használó) felépítésére vonatkozóan lásd pl. a következő művet: H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*, Gondolat, Budapest, 1986.

⁵ Hajós idézett műve (a továbbiakban I. m.) 460. old.

A feladat betűzését használva jelöljük a BD és EF , EF és AC , illetve AC és BD metszéspontját rendre X , Y , Z -vel, ha létrejönnek (5. ábra). Ekkor A , C és Z , Y , továbbá D , B és X , Z , végül E , F és Y , X harmonikusan választja el egymást. Ha például $BEFD$ trapéz, akkor C felezi a rajta át a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát, és így AC felezi a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott minden egyenesnek az AB és AD közé eső szakaszát, tehát BD -t és EF -et is⁶ (6. ábra). Ezekből következik, hogy pl. az AC átmérőjű körben $AZ/AY = CZ/CY$, s így a kör az ehhez az arányhoz tartozó Apollóniosz-kör⁷.

Ezután az XYZ háromszög oldalait a C , D , E pontokban metsző egyenesre Menelaos tételét alkalmazzuk⁸. Eszerint, a háromszög oldalegyeneseit a háromszög valamelyik irányú körbejárása szerint irányítva

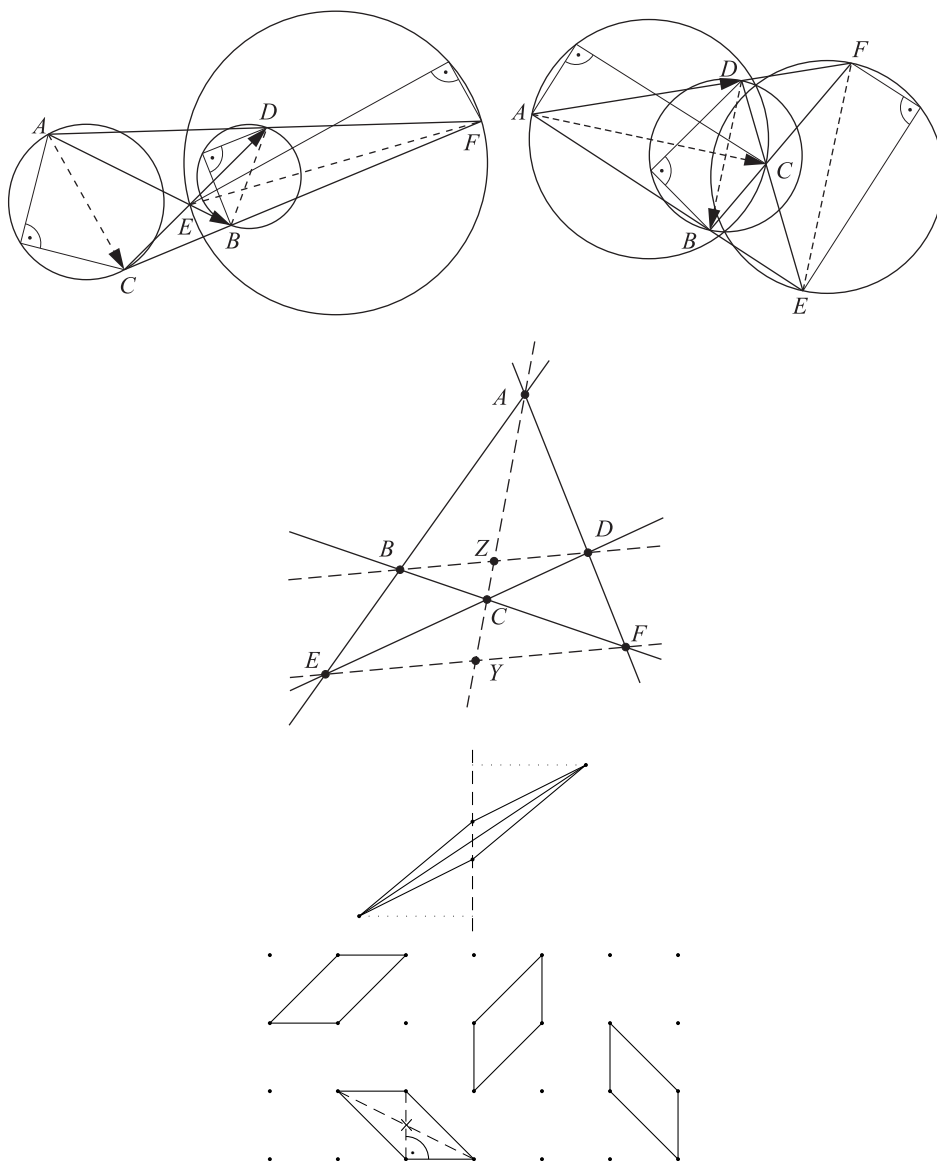
$$(YZC)(ZXD)(XYE) = -1.$$

Ebből az adódik, hogy ha két kör metszi egymást, akkor a rájuk vonatkozó távolságarányok szorzata a harmadik körre vonatkozó arányt adja, vagyis a metszésponton a harmadik kör is átmegy.

Ha pl. EF és BD párhuzamos, akkor Y az EF felezőpontja, Z a BD szakaszé, és hasonló háromszögek felhasználásával fejezhető be az előzőhöz hasonlóan a bizonyítás.

3. A feladat állítását tartalmazza H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer *Az újra felfedezett geometria* címen megjelent könyvének 2.4.7 tétele⁹.

Surányi János



⁶ I. m. 462–463. old.

⁷ I. m. 124. old.

⁸ I. m. 357. old.

⁹ Gondolat Kiadó, 1977., 70. old.

