

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1995. októberi számában egy érdekes cikk jelent meg az Erdős–Mordell tétel első közlésének hatvanadik évfordulója alkalmából, bemutatva a tétel számos alkalmazását és általánosítását. (Lásd [1], [2].)

A tétel fontosságára való tekintettel talán érdeklődésre tarthat számot a cikkben közölt bizonyítás alábbi, egyszerűsített változata.

Tétel. Legyen P az ABC háromszög egy belső vagy határpontja. Legyen P távolsága a csúcsoktól rendre R_a, R_b, R_c , az oldalegyenesektől pedig rendre r_a, r_b, r_c . Ekkor fennáll az

$$(1) \quad R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

egyenlőtlenség (1. ábra).

A bizonyítás három lépésből áll. A továbbiakban használjuk a szokásos $a = BC$, $b = CA$ és $c = AB$ jelöléseket.

1. Ha P a BC oldalon fekszik (2. ábra), akkor az APC háromszög kétszeres területe br_b -vel, az ABP háromszög kétszeres területe pedig cr_c -vel egyenlő, így az ABC háromszög kétszeres területe $br_b + cr_c$. Másrészt R_a nem lehet rövidebb az ABC háromszög A -ból induló magasságánál, így aR_a nem lehet kisebb az ABC háromszög kétszeres területénél. Tehát

$$(2) \quad aR_a \geq br_b + cr_c.$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlőtlenség érvényben marad a BAC szögtartomány bármely P pontjára, hiszen P -t az AP félegyenes és a BC oldal P' metszéspontjára cserélve a P' -re vonatkozó egyenlőtlenség hasonlóság miatt ekvivalens (2)-vel.

2. Alkalmazzuk (2)-t P helyett annak a BAC szögtartomány szögfelezőjére vett P' tükörképére. Minthogy értelemeszerű jelölésekkel $R'_a = R_a$, $r'_b = r_c$ és $r'_c = r_b$, innen a BAC szögtartomány bármely P pontjára az

$$(3) \quad aR_a \geq br_c + cr_b.$$

összefüggést nyerjük.

3. Ha P az ABC háromszög belső- vagy határpontja, akkor az a, b, c indexek ciklikus permutálásával látható, hogy (3) mellett fennállnak a

$$bR_b \geq cr_a + ar_c \quad \text{és} \quad cR_c \geq ar_b + br_a$$

összefüggések is. A három egyenlőtlenséget rendre a -val, b -vel, c -vel leosztva, majd összeadva őket, a tétel állítása adódik:

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{b^2 + c^2}{bc}r_a + \frac{c^2 + a^2}{ca}r_b + \frac{a^2 + b^2}{ab}r_c \geq 2(r_a + r_b + r_c).$$

A fenti bizonyítás elemzésével könnyen látható, hogy pontosan akkor áll egyenlőség (1)-ben, ha az ABC háromszög szabályos és P a középpontja. Ennek végig gondolását az olvasóra bízuk.

Referenciák

[1] Egy geometriai probléma megoldása, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, (11. évf., 1935. febr.)

[2] Reiman István: 60 éve jelent meg a Középiskolai Matematikai Lapokban az Erdős–Mordell tétel, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (45. évf., 1995., 385–394. o.)

Komornik Vilmos, Strasbourg

