

A KöMaL 1995. évi 1. számában a soros $R-L-C$ köröknél fellépő rezonanciajelenségekkel, azok egyszerű (felsőbb matematikai ismereteket nem igénylő) tárgyalásával foglalkoztunk. Vizsgálódásainkat most kiterjesztjük a mechanikai rezgésekre, és felhívjuk a figyelmet a két jelenségkör közötti analógiákra is.¹

Ha egy rezgő testre a rugóerőn kívül egy periodikus kényszerítőerő, továbbá a sebességgel egyenesen arányos nagyságú csillapítóerő is hat, akkor csillapított kényszerrezgésről beszélünk. Ennek a mozgásnak az ideális változatával foglalkoznak a hivatkozott tankönyvek is.

A mozgás leírására forgó vektorokat használhatunk, ahogyan a váltakozó áram leírására is. Induljunk ki a váltóáramnál használt mennyiségek vektoraiból, és állapítsuk meg | analógiák segítségével |, hogy melyik mechanikai mennyiség felel meg nekik a rezgés esetén. Tekintsük az ideális soros $R-L-C$ áramkört, illetve egy csavarrugóhoz erősített testet, amelyre a fentebb említett erők hatnak.

Tudjuk, hogy egy kondenzátorba úgy lehet sok töltést beleprésselni, ha nagy feszültséget kapcsolunk rá. Ebből a legkönnyebb azt az analógiát megállapítani, hogy a kondenzátor egy rugóhoz hasonlít. Tehát a rugóerőnek megfeleltetjük a kondenzátor sarkain lévő feszültséget. Az ohmos ellenálláson lévő feszültségnek nyilván a csillapítóerőt feleltethetjük meg. A teljes $R-L-C$ kör sarkain lévő feszültségnek, vagyis a külső kényszerítő feszültségnek pedig a kényszerítőerőt (más szóval gerjesztőerőt) feleltetjük meg. Legyen e gerjesztőerő körfrekvenciája ω , amelyet a vizsgálatok során folyamatosan lehet változtatni, nullától igen nagy értékig. Legyen továbbá a rugóhoz kapcsolt test szabad rezgéseinek körfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, az úgynevezett saját(kör)frekvencia.

Az önindukciós tekerésre jutó feszültségnek nehezebb megtalálni az analogonját, de hát már úgysem maradt más, mint a tömeg és a gyorsulás szorzata, amit vektornak tekinthetünk. Természetesen azt az ideális esetet vizsgáljuk, amikor mindegyik erő azonos frekvenciával, időben szinuszosan változik.

A harmonikus rezgőmozgás vizsgálatából tudjuk, hogy a sebesség negyed periódussal, 90° -kal siet a kitéréshez képest, illetve, hogy a gyorsulás ellentétes fázisban van a kitéréssel, vagyis 180° -kal siet hozzá képest.

Ha a gerjesztőerő vektorának jele G , a rugóerő R , a csillapítóerő C , továbbá, ha a tömeg és a gyorsulás szorzatát T -vel jelöljük, illetve megállapodunk abban, hogy ezek a betűk a vektorok abszolút értékét képviselik, tehát pozitívak, akkor a szóban forgó erők az 1. ábra szerinti vektorsokszöveget rajzolhatjuk fel.

A vektorok egymáshoz képesti helyzetét a következők magyarázzák: A gyorsulás, illetve a tömeg és gyorsulás szorzatát reprezentáló T vektor egy egyenesbe esik a kitéréssel, de azzal ellentétes irányú. Hasonlóan a rugóerőt képviselő R is egy egyenesbe esik a kitéréssel. A C vektor merőleges T -re, mert ez a vektor a sebességgel esik egy egyenesbe, a sebesség pedig 90° -kal megelőzi a kitérést. A G , C és R vektorok vektori összege tehát T kell legyen, de ez csak úgy valósítható meg, hogy G vektor „ferdén” áll T -hez képest, vagyis a kitérésvektorral, amely T -vel ellentétes irányú, s az ábrába nincsen berajzolva, a G vektor φ szöveget zár be.

Mint ahogy az említett vektorok ω szögsebességgel forgó vektorok, hasonlóan a váltakozó áramnál használt eljárás-hoz, a 2. ábrán látható módon is ábrázolhatjuk őket. Először a V sebességvektort vesszük fel, mert ez felel meg az áramerősség vektorának. Ugyanis a rugóerőt a kondenzátor feszültségével azonosítottuk, de a kondenzátor feszültsége egyenlő a töltés és a kapacitás hányadosával, míg a rugóerő egyenesen arányos a kitéréssel. Ebből következik, hogy a kitérés a kondenzátor töltésének a megfelelője. A töltés időegységre eső változása az áramerősség, aminek akkor a mechanikai mennyiségek körében a kitérés időegységre eső változása, vagyis a sebesség kell megfeleljen.

A sebességhez képest 90° -kal lemarad a kitérés X vektora, viszont G vektor φ szöggel jár X előtt, C vektor pedig a V sebességgel ellentétes irányú.

Vegyük úgy, hogy ezek a forgó vektorok a nekik megfelelő mechanikai mennyiségek amplitúdóját képviselik. Az ábrákból a következőket olvashatjuk le a vektorok hosszára vonatkozólag: $G \cos(180^\circ - \varphi) + R = T$ és $G \sin(180^\circ - \varphi) = C$.

Használjuk a továbbiakban a Budó: Mechanika, 19. paragrafusának jelöléseit, tehát G helyett ezután F_0 -t írunk, R helyett kA -t, T helyett $mA\omega^2$ -et és C helyett $\beta A\omega$ -t. Ezekkel a fenti két egyenletet így írhatjuk le:

$$F_0 \cos \varphi = kA - mA\omega^2, F_0 \sin \varphi = \beta A\omega.$$

Ezek hányadosából a kitérés és a gerjesztőerő közötti fáziskülönbségre rögtön kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta A\omega}{kA - mA\omega^2},$$

illetve a kitérés amplitúdójának négyzetére

$$A^2 = \frac{F_0^2}{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}.$$

Látható, hogy mindkettő függ a gerjesztőerő aktuális frekvenciájától.

¹ Az egyes mennyiségek jelölése Budó Ágoston: Mechanika tankönyvének 19. paragrafusát, illetve a forgó vektorok vonatkozásában Holics László gimnáziumi III. osztályos könyve függelékének 29. pontját követi.

Vezessünk be a hivatkozott könyvnek megfelelően további egyszerűsítő jelöléseket! Legyen $f_0 = F_0/m$, $\kappa = \beta/(2m)$, illetve a már említett $\omega_0^2 = k/m$. Ezekkel a fáziseltolódás mértékére írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cdot \kappa \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

az amplitúdónak a frekvenciától való függésére pedig ezt kapjuk:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}.$$

Foglalkozunk most a *rezonanciának* nevezett esettel. Ez lényegében azt jelenti, hogy a gerjesztőerő ω körfrekvenciáját igen kicsi értékekből kiindulva növeljük igen nagy értékekig, miközben a rezgő test amplitúdóját figyeljük. Ha az amplitúdót az ω körfrekvencia függvényében ábrázoljuk is, akkor az úgynevezett rezonanciagörbét vesszük fel. Ilyen görbéket mutat a 3. ábra.

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy a görbék nem az origóból indulnak ki az (ω, A) koordináta-rendszerben, hanem, mint az a fenti amplitúdóképletből is leolvasható, f_0/ω_0^2 kezdeti értékből. (f_0/ω_0^2 dimenziója természetesen méter.)

A 3. ábrán több görbe látható, amelyek között az tesz különbséget, hogy milyen erős csillapítás hat a rezgő testre, vagyis mekkora β , illetve ennek következtében κ értéke. Mindegyik görbe ugyanonnan indul, később maximumot ér el, majd pedig zérus értékhez tart igen nagy ω esetén. A legelső görbéhez tartozik a legnagyobb csillapítás, a felette következőknél csökken.

A maximumok helye, vagyis a rezonancia helye érdekes. Látható, hogy erős csillapítás esetén az ω_0 sajátkörfrekvenciánál jóval kisebb ω_r körfrekvenciánál van a görbe maximuma.

A maximum helyét az amplitúdó képlet nevezőjében lévő gyök alatti mennyiség átalakításával kaphatjuk meg. Átalakítjuk $\omega^2 = z$ -ben másodfokú függvénnyé, majd ennek maximumát a szokásos „ $-b/2a$ ” helyen keressük:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa\omega^2 &= z^2 + (4\kappa^2 - 2\omega_0^2)z + \omega_0^4; \\ „-b/2a” = \omega_0^2 - 2\kappa^2 &= \omega_r^2, \quad \text{tehát} \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2} < \omega_0. \end{aligned}$$

A gondosabb elemzés tehát azt mutatja, hogy ha a kényszerrezgést végző testre ható gerjesztőerő frekvenciáját igen kis frekvenciáktól indulva folyamatosan növeljük, akkor a kényszerrezgés amplitúdója egy ν_r frekvenciánál a legnagyobb értékét veszi fel, *s ez a ν_r frekvencia a ν_0 sajátfrekvencia közelébe esik, de annál mindig kisebb.*

Ez a jelenség az *amplitúdórezonancia*.

Ha a csillapítóhatás gyenge, mert például levegőben rezeg a kényszerrezgést végző test, akkor κ^2 másodrendűen kicsiny érték, s ilyenkor gyakorlatilag nem lehet megkülönböztetni a maximális amplitúdóhoz tartozó ω_r gerjesztőfrekvenciát ω_0 -tól.

Az amplitúdó maximális értékét megkapjuk, ha ω_r értékét A képletébe helyettesítjük:

$$A(\omega_r) = \frac{f_0}{2\kappa \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} > A(\omega_0).$$

A gerjesztőerő és a kitérés nincsen azonos fázisban. A közöttük lévő fázisszög tangensét az előzőekben levezettük. $\operatorname{tg} \varphi$ ott kapott képletéből látható, hogy bármilyen nem nulla ω esetén φ is nullától különböző szög.

Mint hogy a rezonanciához tartozó ω_r körfrekvencia kisebb ω_0 -nál, de gyenge csillapítás esetén annak közelében van, a képletből látszik, hogy rezonancia esetén $\operatorname{tg} \varphi$ -re igen nagy szám adódik, azaz $\varphi \approx 90^\circ$. Ilyenkor tehát a gerjesztőerő forgóvektora körülbelül merőleges a kitérés forgóvektorára, azaz éppen a sebesség vektorával párhuzamos és egyirányú. Emiatt a rezgő testtel állandóan energiát közöl ($F \cdot v = \text{teljesítmény!}$). Ha a csillapítás nem tudja felemészteni a test energianövekményét, akkor állandóan növekszik az amplitúdó, egészen az eszköz tönkremenetelig. . .

Kérdezhetjük, hogy a kényszerrezgést végző test *sebességamplitúdója* hogyan függ a gerjesztőerő frekvenciájától. Az előző sorokból érezhető, hogy a sebességamplitúdó akkor lehet a legnagyobb, amikor a gerjesztőerő forgóvektora pontosan merőleges a kitérés forgóvektorára, vagyis amikor $\varphi = 90^\circ$. A sebességamplitúdó, mint tudjuk, $A\omega$, azaz

$$\frac{f_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\kappa^2}},$$

ami valóban akkor maximális, ha $\omega = \omega_0$. A legnagyobb sebességamplitúdó pedig $f_0/(2\kappa)$.

Érdekes a *gyorsulás amplitúdóját* is megvizsgálni. Ez $A \cdot \omega^2$, vagyis

$$\frac{f_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^4} + \frac{4\kappa^2}{\omega^2}}}.$$

Ez utóbbi tört maximuma ott van, ahol a nevezőjében lévő gyök alatti mennyiség minimális. A gyök alatti mennyiséget $1/\omega^2 \equiv z$ -ben másodfokú függvényé alakítjuk, s megkeressük a minimumát:

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^4} + \frac{4\kappa}{\omega^2} = \omega_0^4 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + (4\kappa^2 - 2\omega_0^2) \frac{1}{\omega^2} + 1 = \omega_0^4 z^2 + 2(2\kappa^2 - \omega_0^2)z + 1,$$

$$\text{„} -b/2a\text{”} = \frac{2(\omega_0^2 - 2\kappa^2)}{2\omega_0^4} = \frac{\omega_0^2 - 2\kappa}{\omega_0^4} = \frac{1}{\omega_g^2}, \quad \omega_g = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}} > \omega_0.$$

A gyorsulásamplitúdó tehát mindig ω_0 -nál nagyobb körfrekvenciáknál maximális. A 4. ábra a kényszerrezgést végző test gyorsulásamplitúdójának a gerjesztőerő ω körfrekvenciájától való függését mutatja, különböző erősségű csillapítások mellett. A grafikonokon is látható, hogy maximumuk ω_0 -nál nagyobb ω_g körfrekvenciánál található. (Hasonlóan az R - L - C áramkör tekercsén lévő feszültséghez, a kezdetben megállapított analógiának megfelelően.)

Érdeemes felfigyelni még arra, hogy ω_0 éppen ω_r és ω_g mértani közepe, vagyis $\omega_0 = \sqrt{\omega_r \cdot \omega_g}$.

Légrádi Imre





