

Az elmúlt tanév Arany Dániel Matematika Verseny és az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematika feladatait és eredményeit az Országos Köznevelési és Szolgáltató Intézet kiadványából vettük át, amelyben a példák megoldásai is megtalálhatók. Ez segítséget nyújthat az e tanévi versenyekre való felkészülésben is!

A kiadvány megrendelhető: OKSZI, 1054 Budapest, Báthori u. 10.
Levélcím: 1399 Budapest, Pf. 701/432.

I. (A szakközépiskolák tanulói)Első (iskolai) forduló

Kategória

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x + y = 1; x^5 + y^5 = 31.$$

2. Határozza meg azokat az $(x; y)$ valós számpárokat, amelyek eleget tesznek a következő feltételek mindegyikének:

a) az x egész szám;

b) $x^2 + y^2 \leq 90;$

c) $2x^2 - xy + 10 = 0.$

3. Adott egy konvex hatszög, amelynek csúcsai A, B, C, D, E, F . Legyen az ABC háromszög súlypontja B_1 , a BCD háromszög súlypontja C_1 , a CDE háromszög súlypontja D_1 , a DEF háromszög súlypontja E_1 , az EFA háromszög súlypontja F_1 , az FAB háromszög súlypontja A_1 . Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hatszög középpontosan szimmetrikus!

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} = 2^{7x-1}.$$

($[a]$ jelenti az a valós szám egészrészét.)

5. Igazolja, hogy ha négy egymás után következő 5-nél nagyobb egész szám egyike sem osztható 5-tel, akkor a szorzatuk utolsó három számjegye független a négy szám kiválasztásától.

6. Legyenek a, b és c egy háromszög oldalai és α, β, γ rendre a velük szemközti szögek. Bizonyítsuk be, hogy ha $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$, akkor $a^2 + bc - c^2 = 0$.

Második forduló

1. Legyen $x + \frac{1}{x} = 3$. Igazolja, hogy ekkor $x^7 + \frac{1}{x^7}$ egész szám!

2. Oldja meg a pozitív egész számok halmazán az

$$(x + y)z = xy(z - 1)$$

egyenletet!

3. Az ABC háromszög BC oldalának belső pontja legyen D . A D ponton át húzzunk párhuzamost az AC és az AB oldalegyenessel. Az előbbi egyenes az AB oldalt E , az utóbbi egyenes az AC oldalt F pontban metszi. A CE és a BF egyenesek metszéspontját jelöljük G -vel. Igazolja, hogy az $AEGF$ négyszög területe egyenlő a BCG háromszög területével!

4. Oldja meg a pozitív számok halmazán az

$$x^{2 \sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x}$$

egyenlőtlenséget!

5. Jelöljük az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög oldalainak hosszát a -val, b -vel, c -vel, a magasság-pontját M -mel, a súlypontját S -sel! Igazolja, hogy az MS egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos a BC oldallal, ha

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(2a^2 - b^2 - c^2).$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x - 11x^2 = 11y - 8y^2; (1)6x + 12x^2 = y + 4y^2.(2)$$

2. Az ABC háromszög a , b , c hosszúságú oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítottuk. Így a $KLMNPR$ hatszöget kaptuk. A hatszög területét T -vel, a háromszög területét t -vel jelölve, igazolja, hogy

$$T \geq 13t.$$

3. Egy O középpontú, r sugarú kör OA sugarának felezőpontja F . F -ben az OA sugarra merőleges félegyenest állítunk. Ez az adott kört K -ban metszi. Legyen $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, és E_1 és E_2 a kör két olyan (különböző) pontja, amelyekre $E_1FK \leq KFE_2 \leq \alpha/2$.

Jelöljük P -vel az OA és az E_1E_2 egyenesek közös pontját. Bizonyítsa be, hogy minden α esetén ugyanazt a P pontot kapja.

Mit mondhat P -ről, ha $\alpha = 180^\circ$, illetve ha $180^\circ < \alpha < 360^\circ$?

II.

Kategória

(Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók) Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z = \frac{5}{2}$$

egyenletet, ahol x , y , z nem negatív egész számok.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 - y^2.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsán átmenő kör az AB oldalt P -ben, az AC oldalt Q -ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A csúcsot az APQ háromszög köré írt körének középpontjával összekötő egyenes merőleges BC -re.

4. Határozzuk meg az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat a_{1995} elemét, ha $a_0 = a$ adott pozitív egész, és

$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

5. Igazoljuk, hogy ha $n > 0$ egész szám, akkor az

$$S_n = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

összeg értéke nem egész szám!

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x , y tetszőleges valós számok, akkor az

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3$$

kifejezés értéke pozitív.

2. Legyen p olyan 3-nál nagyobb prímszám, amelynek n -edik hatványa húszjegyű (n pozitív egész). Bizonyítsuk be, hogy e húsz jegy között van három egyenlő.

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalát osszuk fel 7–7 egyenlő részre. Az AB és a CD oldalak A , illetve D csúcsától számított ugyanannyiadik osztópontjait összekötő szakaszok a négyszöget hét négyszögre vágják szét. Bizonyítsuk be, hogy a hét négyszög között van olyan, amelynek a területe az $ABCD$ területének a hetedével egyenlő.

4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left(\sqrt{5} + 2\right)^{1994} + \left(\sqrt{10} + 3\right)^{1995}$$

összeg tizedesvessző előtti számjegye (azaz az egyes helyiértékű számjegye) 1-gyel egyenlő. (A feladat megoldásához számológép nem használható.)

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $A_1A_2A_3A_4$ és $A_1B_2B_3B_4$ közös csúcsú, azonos körüljárású különböző négyzetek. Bizonyítsuk be, hogy az A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 egyenesek egy ponton mennek át.

Igaz-e a feladat következő általánosítása: ha $A_1A_2A_3 \dots A_n$ és $A_1B_2B_3 \dots B_n$ közös csúcsú, azonos körüljárású különböző szabályos n -szögek, akkor az A_2B_2 , A_3B_3 , $\dots$, A_nB_n egyenesek egy ponton mennek át.

2. Jelölje egy tetszőleges konvex n -szög oldalait $a_1, a_2, \dots, a_n$; belső szögeit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, területét pedig t . Mely n értékekre igaz bármely konvex n -szög esetén, hogy

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{t} \geq \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{1}{\sin \alpha_2} + \dots + \frac{1}{\sin \alpha_n}?$$

3. Legyen p és q pozitív prímszámok. Tudjuk, hogy

$$\sqrt{p^2 + 7pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$$

egész. Bizonyítsuk be, hogy $p = q$.

III.

Kategória

(A gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói) Első (iskolai) forduló

1. Van-e olyan n , amelyre az 1-től $4n$ -ig terjedő egész számok elhelyezhetők egy 4 sorból és n oszlopból álló téglalapba úgy, hogy az utolsó sorban minden elem a fölötte álló három elemnek az összege legyen?

2. Legyen két egymást metsző kör k_1 és k_2 , az egyik közös pontjukat jelölje A . A két kör egyik közös érintője k_1 -et P -ben, k_2 -t Q -ban, a másik közös érintő k_1 -et R -ben, k_2 -t S -ben érinti. Bizonyítsuk be, hogy a PAQ és RAS háromszögek körülírt körei érintik egymást.

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely legalább hatféleképpen előáll négy darab különböző (pozitív) osztójának az összegeként?

4. Mutassuk meg, hogy ha egy 10 egységszer 8 egységszer 6 egységnyi oldalú téglatestben akárhogyan helyezünk is el 9 darab (egymásba nem nyúló) egységkockát, akkor biztosan elhelyezhető a téglatestben még egy egységnyi sugarú gömb is (amelynek nincs közös belső pontja egyik kockával sem és minden pontja a téglatestbe esik).

5. Egy dobozban 5 vásárlási utalvány van, értékük 100, 200, 300, 400, illetve 500 forint. A dobozból legfeljebb százszor húzhatunk egy-egy utalványt úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott papírt. Bármelyik húzás után leállhatunk (azaz többször nem húzunk), és akkor megtarthatjuk az éppen nálunk levő utalványt. Milyen szabály szerint álljunk le, hogy a várható nyereményünk a lehető legnagyobb legyen, és mennyi ez a maximális várható nyeremény?

Második (döntő) forduló

1. A k kör belülről érinti az ABC háromszög körülírt körét az R pontban, továbbá érinti az AB oldalt P -ben, az AC oldalt pedig Q -ban. Az RP , ill. RQ egyenesek másik metszéspontja a körülírt körrel S , ill. T , a k kör középpontja U . Bizonyítsuk be, hogy az AU , BT , CS és PQ egyenesek egy ponton mennek át.

2. Legyen n rögzített pozitív egész szám. Adjuk meg az

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{9}{8} n^2$$

egyenletnek az összes olyan megoldását a valós számok körében, ahol minden i -re $1 \leq x_i \leq 2$ teljesül.

3. Számítsuk ki $m = 1995$ esetén az alábbi összeg értékét:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-2)^k \binom{2m-2k}{m-k}.$$

(A $\sum_{k=0}^m$ jelölés azt jelenti, hogy a szóban forgó tagokat az összes $0 \leq k \leq m$ értékre kell összegezni. $\binom{0}{0}$ értéke definíció szerint 1.)

Az 1994/95. évi matematika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória (A szakközépiskolák tanulói)

I. díj: Németh Sándor Géza, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola, felkészítő tanár: Benedek Ilona

II. díj: Zaupper Bence, III. o., Győr, Krúdy Gyula Gimnázium és Vendéglátóipari Szki., felkészítő tanár: Babarczy Imréné

III. díj: Bányai Attila, IV. o., Kaposvár, Eötvös Loránd Műszaki Középiskola, felkészítő tanár: Demeter László

4. Kiss Béla, II. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szakközépiskola, felkészítő tanár: Újvári István

5. Kiss Olivér, IV. o., Debrecen, Mechwart András Gépipari Műszaki Szki., felkészítő tanár: dr. Rutovszky Ede

6. Stikkel Gábor, III. o., Eger, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimnázium, felkészítő tanár: Máté Mihályné

7. Gál Marcell, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn., felkészítő tanár: Csapó Judit

8. Novák András, IV. o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szakközépiskola, felkészítő tanár: Szenesné Durucz Anna

9. Pálos Ferenc, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn., felkészítő tanár: Csapó Judit

10. Lovász Zoltán, IV. o., Bonyhád, Perczel Mór Közgazdasági Szakközépiskola, felkészítő tanár: Lohl Árpád
Miniszteri dicséretben részesült:

11. Szabó Ildikó, IV. o., Miskolc, Fáy András Közgazdasági Szki.; **12.** Kovács Krisztián, IV. o., Békéscsaba, Kemény Gábor Műszaki Szki.; **13.** Havasi László, III. o., Szeged, Kőrösi J. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **14.** Bartha Zoltán, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **15.** László Norbert, IV. o., Pápa, Jókai Mór Közgazdasági Szki.; **16.** Vízványó Attila, IV. o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki.; **17.** Krausz Katalin, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; **18.** Bognár Zsolt, III. o., Kaposvár, Eötvös Loránd Műszaki Középiskola; **19.** Barák Gábor, III. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **20.** Nagy Béla, IV. o., Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki.; **21.** Kardos Sándor Zsolt, IV. o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn.; **22.** Csányi Zsolt, IV. o., Kiskunfélegyháza, Közgazdasági Szki.; **23.** Hényel Erika, IV. o., Salgótarján, Táncsics Mihály Közgazdasági Szki.; **24.** Bazsik András, IV. o., Budapest, Vásárhelyi Pál Kereskedelmi Szki.; **25.** Czuppon Krisztina, IV. o., Zalaegerszeg, Csány László Közgazdasági Szki.; **26–28.** Mihajlik György, IV. o., Vác, Boronkay György Műszaki Szki.; *Fűzéri Csaba*, IV. o., Miskolc, Bláthy Ottó Villamosenergia-ipari Szki.; *Tajti Imre*, III. o., Eger Közgazdasági Szki.; **29.** Börcsök Zsolt, III. o., Szeged, Déri Miksa Ipari Szki.; **30.** Bogos Zsuzsa, IV. o., Szigetszentmiklós, Batthyány Kázmér Gimnázium és Közgazdasági Szki.

II.

kategória

(Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

I. díj: Burcsi Péter, III. o., Pápa, Türr István Gimnázium és Óvónői Szki., felkészítő tanár: Németh Zsolt

II. díj: Gilyén Péter, IV. o., Budapest, Piarista Gimnázium, felkészítő tanár: Varga László, Mazgon Gábor

III. díj: Ehreth Imre, IV. o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, felkészítő tanár: Erdélyi János

4. Nagy Lajos, IV. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, felkészítő tanár: Szabadfalviné Kormányos Anikó

5. **Torma Péter**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Nagy Róbert, Zsebők Ottó, Tamás Imre
6. **Horváth István**, IV. o., Fonyód, Mátyás Király Gimnázium és Postaforgalmi Szki., felkészítő tanár: Bödör Márta
7. **Németh Tibor**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Nagy Róbert, Zsebők Ottó, Tamás Imre
8. **Szűjártó Gábor**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium, felkészítő tanár: Tamás Imre
9. **Simonics Gábor**, IV. o., Sátoraljaújhely, Kossuth Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szki., felkészítő tanár: Dobó Józsefné
10. **Kovács Gábor**, IV. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Széplaki Györgyné

Miniszteri dicséretben részesült:

11. **Farkas Péter**, IV. o., Budapest, Szent István Gimnázium; 12. **Izsák Ferenc**, IV. o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; 13. **Wagner Ferenc**, IV. o., Tata, Eötvös József Gimnázium; 14. **Varga Dezső**, IV. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; 15. **Mikola István**, IV. o., Sárospataki Református Gimnázium; 16. **Kardkovács Zolt**, IV. o., Budapest, Károlyi Mihály Magyar–Spanyol Tannyelvű Gimnázium; 17. **Császár Miklós**, IV. o., Szekszárd, Garay János Gimnázium; 18. **Fekete Gergely**, IV. o., Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimnázium; 19. **Lestyán Zolt**, III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; 20. **Holcsek Balázs**, III. o., Veszprém, Lovassy László Gimnázium; 21. **Horváth Károly**, IV. o., Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimnázium; 22. **Heim László**, IV. o., Budapest, Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola Gimnázium; 23. **Szabó Balázs Zolt**, IV. o., Esztergom, Szent István Gimnázium és Híradástechnikai Szki.; 24. **Lolbert Tamás**, III. o., Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium; 25. **Sztranyák Attila**, III. o., Kecskemét, Katona József Gimnázium; 26. **Szabó Balázs**, IV. o., Veszprém, Vetési Albert Gimnázium; 27. **Benedik Marcell**, IV. o., Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium; 28. **Tarján Péter**, III. o., Budapest, Piarista Gimnázium; 29. **Csorba István**, IV. o., Győr, Révai Miklós Gimnázium; 30–31. **Oláh Judit**, IV. o., Jászberény, Lehel Vezér Gimnázium; **Tihon József**, III. o., Budapest, Szent István Gimnázium.

III. kategória (A speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

- I. díj: **Koblínger Egmont**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
- II. díj: **Szádeczky-Kardoss Szabolcs**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
- III. díj: **Bárász Mihály**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Surányi László, Beleznyai Ferenc, Dobos Sándor
4. **Tóth Gábor Zolt**, III. o., Budapest, Árpád Gimnázium, felkészítő tanár: Mikusi Imre, Vajda István
5. **Németh Zoltán**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
6. **Valkó Benedek**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
7. **Horváth Péter**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
8. **Fey Dániel**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné
9. **Fenyvesi Anikó**, IV. o., Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, felkészítő tanár: Mihályi Gyula, Láng Hugó
10. **Ruzsa Gábor**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, felkészítő tanár: Surányi László, Beleznyai Ferenc, Dobos Sándor

Miniszteri dicséretben részesült:

11. **Elek Péter**, III. o., Budapest, Árpád Gimnázium; 12. **Szobonya László**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 13. **Kovács András**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 14. **Tóth Péter**, III. o., Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium; 15. **Bárász Tamás**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 16. **Orbán András**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 17. **Király Csaba**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 18. **Kiss Márton**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 19. **Hegedűs Márton**, III. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium; 20. **Józsa Balázs Gábor**, IV. o., Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium.

