

(A versenyről szeptemberi számunk 344.–346. oldalán olvashatnak.)

A feladatokat András Szilárd (Csíkszereda) Bencze Mihály (Brassó), Benedek Ilona (Vác), Bogdán Zoltán (Cegléd), Csorba Ferenc (Győr), Katz Sándor (Bonyhád), Kiss Sándor (Nyíregyháza), Kovács Béla (Szatmárnémeti), Oláh György (Révkomárom), Szabó Magdolna (Szabadka) és Weszely Tibor (Marosvásárhely) tanárok javaslataiból állították össze.

I. osztály

1. A mellékelt 3×3 -as bővös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi a számok összege. Határozzuk meg a hiányzó számokat!

199	995	
		1995

2. Egy háromszög oldalai: a, b, c ; egy másik háromszögéi: p, q, r . Bizonyítsuk be, hogy ezekre érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 - 2(ap + bq + cr) > 6 - (p+1)^2 - (q-1)^2 - (r+1)^2.$$

3. Az $ABCD$ téglalap köré írt körének C -t nem tartalmazó AB ívén vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. P -ből az AC , ill. BD átlókra állított merőleges talppontja legyen L , ill. M .

Bizonyítsuk be, hogy az LM szakasz hossza nem függ a P pont helyzetétől!

4. Egy 9×9 -es táblázat mezőire ráírjuk tetszőleges sorrendben az $1, 2, \dots, 81$ számokat. Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendezés esetén található két olyan szomszédos mező, amelyeken levő számok különbsége legalább 6. (Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk).

5. Bizonyítsuk be, hogy $1995^4 + 4^{1995}$ összetett szám!

6. Állítsuk elő az összes olyan x, y racionális számot, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$3x^2 - 5x + 9 = y^2.$$

II. osztály

1. Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjére ráírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

nem prímszám.

3. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B -ből induló szögfelező az AC befogót a P , a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkora a háromszög szögei, ha

$$BP = 2PQ?$$

4. Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számhoz létezik olyan y valós szám, hogy az $(x; y)$ számpár megoldása az

$$x^5 + y^5 - x^4 - y^4 + x^4y + xy^4 - x - y + 1 = 0$$

egyenletnek!

5. Legyen M a hegyesszögű ABC háromszög AD magasságának egy belső pontja, és legyen A_1 a háromszög köré írt kör A végpontú átmérőjének másik végpontja. Az A -ból az A_1M egyenesre emelt merőleges a BC egyenest A_0 -ban metszi; az M -ből AC -re, ill. AB -re állított merőlegesek talppontjait jelölje B_0 , ill. C_0 . Bizonyítsuk be, hogy A_0, B_0, C_0 egy egyenesen vannak.

6. Határozzuk meg azt az f függvényt, amely

- minden nemnegatív egészhez nemnegatív egész számot rendel hozzá, különböző egészekhez különböző egészeket;
- minden nemnegatív egész n -re kielégíti az

$$f^2(0) + f^2(1) + \dots + f^2(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

egyenlőtlenséget. $(f^2(x) = f(x) \cdot f(x))$.

III. osztály

1. Az $AB = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapéz szerkesztettünk, amely érintőnégyyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

2. Az e élhosszúságú $ABCD A' B' C' D'$ kocka egy lapja az $ABCD$ négyzet; az AA' , BB' , CC' , DD' élek párhuzamosak. Mekkora az $ADCD'$ és a $BCDC'$ derékszögű tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

3. Bizonyítsuk be, hogy

a)
$$\log_a \frac{2bc}{b+c} + \log_b \frac{2ca}{c+a} + \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq 3,$$

ha $0 < a, b, c < 1$.

b)
$$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3,$$

ha $a, b, c > 1$.

Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

4. Egy sakkbajnokságon mindenki mindenkivel játszott. Győzelemért 1, döntetlenért $1/2$, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén kiderült, hogy minden résztvevő pontszámának felét az utolsó három helyezett elleni játszmákban szerezte. Hány résztvevője volt a versenynek?

5. Határozzuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = t + \sqrt{x + y + z - t}.$$

6. Határozzuk meg azt a valós számok halmazán értelmezett valós értékű f függvényt, amely minden valós x -re kielégíti az

$$(f(x))^3 + (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}) f(x) = 2x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2n+1}$$

egyenletet ($n \geq 1$ rögzített egész).

IV. osztály

1. Az A csúcsú α hegyesszög szögtartományában vegyünk fel egy tetszés szerinti P pontot. Ennek merőleges vetülete a szögszárazon legyen B , illetve C . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{BC}{AP} = \sin \alpha.$$

2. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az O pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha vagy az átlók merőlegesek, vagy pedig O felezi valamelyik átlót.

3. Adott az $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pozitív számokból álló halmaz. Írjuk fel minden nem üres részhalmazában a számok összegét. Igazoljuk, hogy az így felírt számokat n csoportba tudjuk osztani úgy, hogy az egyes csoportokban a legnagyobb és legkisebb szám hányadosa nem nagyobb 2-nél!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y olyan pozitív egészek, amelyekre

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

teljesül, akkor $x - y$, $2x + 2y + 1$ és $3x + 3y + 1$ is négyzetszámok.

5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely az egész számok halmazán van értelmezve és értéke is egész, és minden x egészre eleget tesz a következő egyenletnek:

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x.$$

6. Fibonacci-sorozatnak nevezzük az $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$) kikötésekkel értelmezett sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < n$, akkor az

$$F_{2p+1} + F_{2p+3} + \cdots + F_{2n+1}$$

és

$$F_{2p} + F_{2p+2} + \cdots + F_{2n}$$

számok nem lehetnek a Fibonacci-sorozat tagjai.