1.

(1) $$2x-3y+1\neq 0,\qquad 3x+2y-4\neq 0.$$

Legyen $\dfrac{1}{2x-3y+1}=a$, $\dfrac{1}{3x+2y-4}=b$, ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$3a+4b=\frac{13}{42},(2)-6a+7b=\frac{-1}{12}.(3)$$

A (2) kétszeresét adjuk a (3)-hoz:

$$15b=\frac{45}{84}\qquad \text{amiből}\qquad b=\frac{1}{28}.$$

Ezt visszahelyettesítve (2)-be:

$$3a=\frac{1}{6},\qquad \text{amiből}\qquad a=\frac{1}{18}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{2x-3y+1}=\frac{1}{18}\frac{1}{3x+2y-4}=\frac{1}{28}.$$

Ebből

$$2x-3y+1=183x+2y-4=28.$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk: $x=10$, $y=1$. Ez a számpár eleget tesz (1)-nek is, így megoldás.

2. A derékszögű háromszög befogói x és y $(x>y)$, az átfogó z. A feladat szövege szerint $x=a+b$, $z=y+c$ és $a^2+b^2=c^2$. De az eredeti háromszög is derékszögű, ezért $x^2+y^2=z^2$. Behelyettesítés után $(a+b)^2+y^2=(y+c)^2$. Rendezés után $ab=yc$. Mivel ab az új háromszög területének a kétszerese, azért a c-hez tartozó magasság csak y (a régi háromszög rövidebb befogója) lehet.

3. Ha kiszámoljuk az egység alapú, 30°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög szárát, akkor a keresett sugár is megvan:

$$\sin 15^\circ=\frac{0{,}5}{r},\qquad \text{amiből}\qquad r=\frac{0{,}5}{\sin 15^\circ}.$$

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$r=\frac{0{,}5}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}932.$$

4. A feladat értelmezési tartománya: $x>0$, $x\neq 1$.
A bal oldalon minden logaritmust átírunk 3-as alapúra:

$$\frac{2\cdot 1}{\log_3 x}+\frac{2\cdot 2}{\log_3 x}+\cdots+\frac{2\cdot n}{\log_3 x}=(n^2+n)\log_x 3$$

Tudjuk, hogy $1+2+\cdots+n=\dfrac{n^2+n}{2}$, így a bal oldalon a számlálók összege n^2+n. Ezzel oszthatunk, és kapjuk az $\dfrac{1}{\log_3 x}=\log_x 3$ azonosságot.
Ezért a feladat értelmezési tartománya egyben a feladat megoldáshalmaza is.

5. A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.
A parabola csúcspontjának koordinátái: $(-2;-10)$.
A parabola egyenlete: $y+10=(x+2)^2$.
Mind a két egyenletből $(x+2)^2$-t fejezzük ki:

$$y+10=25-(y-3)^2y^2-5y-6=0y_1=-1,\qquad y_2=6.$$

Ezeket visszaírva, a sokszög csúcsai a következők lesznek:

$$A(-5;-1),\qquad B(1;-1),\qquad C(2;6),\qquad D(-6;6).$$

Belátható, hogy ez a sokszög szimmetrikus trapéz. Kerülete: $6+8+2\sqrt{50}=14+10\sqrt{2}\approx 28{,}14$. Területe: $\dfrac{(6+8)\cdot 7}{2}=49$.

6.
$$b_1 = b_{10} = 10a_1 + 45d, b_2 = b_{15} - b_{10} = 5a_1 + 60d, b_3 = b_{19} - b_{15} = 4a_1 + 66d,$$
és tudjuk, hogy b_1, b_2, b_3 egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ezért
$$5a_1 + 60d = \frac{10a_1 + 45d + 4a_1 + 66d}{2} = 7a_1 + 55{,}5d.$$
$4{,}5d = 2a_1$, amiből $a_1 : d = 9 : 4$.

7. Rendezve:
$$x^2 - (p+2)x + \left(\frac{p^3}{4} + 2\right) = 0.$$
A diszkrimináns:
$$D = (p+2)^2 - 4\left(\frac{p^3}{4} + 2\right) = -p^3 + p^2 + 4p - 4 =$$
$$= p^2(1-p) + 4(p-1) = (1-p)(p^2-4) = (1-p)(p-2)(p+2).$$
Ha $p = -2$, 1 vagy 2, akkor az egyenletnek két azonos valós gyöke van. Ha $p < -2$ vagy $1 < p < 2$, akkor két különböző valós gyök van, míg a fennmaradó esetekben ($-2 < p < 1$ vagy $p > 2$) nincs valós gyök.

8. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $(1+q)^n \geq 1 + nq$, ha $q > -1$ valós, n pozitív egész szám (Bernoulli-egyenlőtlenség). Ez $n = 1$-re igaz; tegyük fel, hogy n-re igaz. Ekkor
$$(1+q)^{n+1} = (1+q)(1+q)^n \geq (1+q)(1+nq) = 1 + nq + q + nq^2 \geq 1 + (n+1)q,$$
ez pedig éppen $(n+1)$-re az egyenlőtlenség.

Ezt felhasználva:
$$(1 + (a+b+1))^n \geq 1 + n(a+b+1). \tag{4}$$
Az 1, na, nb, n értékekre a számtani és a mértani közép közötti összefüggés szerint:
$$1 + n(a+b+1) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{n^3ab}. \tag{5}$$
A (4) és (5) alapján:
$$(a+b+2)^{4n} \geq (1 + na + nb + n)^4 \geq 256n^3ab.$$

Számadó László