A fraktálok csodálatosan gazdag, titokzatos világának egy szeletét, a Mandelbrot-féle halmazok szimmetriáját fogjuk vizsgálni.

Legyen F egy, a $\mathbf{C}$ komplex számsíkon[1] értelmezett függvény. Tetszőleges c komplex szám esetén elkészíthetjük azt a (c-től függő) $\{z_n\}$ sorozatot, amelyet a $z_0 = 0$; $z_{n+1} = F(z_n) + c$ ($n > 1$ egész) iterációs sorozat definiál. Más szóval a

$$0, F(0) + c, F(F(0) + c) + c, \ldots$$

sorozatról van szó. Az F *függvény szerinti Mandelbrot-féle halmaz* azokból a c komplex számokból áll, amelyekre a fent definiált sorozat korlátos. Ez a halmaz csak az F függvénytől függ:

$$\mathrm{Man}\,(F) := \{c \in \mathbf{C} | \{z_n\} \text{ korlátos}\}.$$

Két speciális függvényfajtát fogunk nézni; az $F(z) = z^p$ esetet és az $F(z) = \overline{z}^p$ esetet, ahol $p > 1$ egész és $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli. Az $F(z) = z^p$ esetben p-edrendű Mandelbrot halmazról beszélünk, amit $M(p)$ jelöl. $F(z) = \overline{z}^p$ esetén a kapott halmazt p-edrendű *Mandelbar halmaznak* mondjuk, ennek jele $\overline{M}(p)$. Ez esetben sorozatunk:

$$0, c, c^p + c, (c^p + c)^p + c, \ldots \qquad \text{illetve} \qquad 0, c, \overline{c}^p + c, \left(\overline{\overline{c}^p + c}\right)^p + c, \ldots \qquad .$$

Az $M(p)$ (illetve az $\overline{M}(p)$ halmaz) esetén „hasonlóan viselkedik” az a és b komplex szám, ha a segítségükkel képezett iterációs sorozat megfelelő elemei egyenlő távolságra vannak az origótól.

A pontos definició végett mindenekelőtt tekintsük az alábbi sorozatokat:

$M(p)$ esetén $\quad z_0 = 0,\ z_{n+1} = z_n^p + a; \quad w_0 = 0,\ w_{n+1} = w_n^p + b$, $\overline{M}(p)$ esetén $\quad z_0 = 0,\ z_{n+1} = \overline{z}_n^p + a; \quad w_0 = 0,\ w_{n+1} = \overline{w}_n^p$

Definició. *Az a és b komplex számokat az $M(p)$ szerint (illetve az $\overline{M}(p)$ szerint) ekvivalenseknek nevezzük, ha a fenti két–két sorozatban minden n természetes szám esetén teljesül a $|z_n| = |w_n|$ egyenlőség. Ezt a relációt $a \sim b$ fogja jelölni.*

A fenti definicióból nyilvánvaló, hogy a szereplő reláció reflexiv, szimmetrikus és tranzitív, tehát valóban ekvivalenciareláció. Elvileg, célunk a komplex számsík pontjainak olyan „kiszínezése”, amelynél az ekvivalens pontok ugyanolyan színűek. Ennek a gyakorlatban igen sok akadálya van. Először is nem tudjuk, hogy mely komplex szám által meghatározott sorozat lesz véges. Még véges sorozat esetében sem tudjuk, hogy mekkora lesz a sorozat elemeinek a korlátja; hiszen különböző sorozatok korlátja is különböző lehet. Végezetül pedig a színezés „tényleges” véghezvitele csak számítógép segítségével lehet, ahol a képernyő egy eleve megadott korlátot jelent. Lehetséges, hogy ezen a korláton belül nem derül ki, hogy két pont különböző színű. Az viszont biztos, hogy azonos színű pontok esetén akármilyen korlát alatt és akárhányadik lépés után hagyjuk abba az eljárást, mindig fennállnak az ekvivalenciát biztosító egyenlőségek.

Ennek megfelelően egy „durvább” ekvivalenciarelációt kapunk, ha csak egy adott d pozitív korlátig nézzük az abszolút értékeket; és csak azt vizsgáljuk meg, hogy a sorozat hányadik lépésben hagyja el ezt a korlátot. Ez utóbbi feltétel azt is jelenti, hogy az abszolút értékek megegyezését sem kivánjuk meg.

Az eljárást számítógépes programmal is megadható. A program belső adatai a következőek:

Egy d pozitív korlát.

Egy N maximális iterációszám.

Egy *szín(j)* függvény, amely minden $j < N$ természetes számhoz valamilyen tényleges színt rendel.
Az eljárást az alábbi színezési algoritmus adja meg:
Ciklus, miközben c „befutja a komplex számsíkot”
$z := 0$; $j := 1$;
ciklus míg ($j < N$) és ($|z| <= d$)
$z := F(z) + c$
$j := j + 1$
belső ciklus vége
Ha $j = N$, *akkor*c színe legyen fekete*egyébként pedig*c színe legyen *szín(j)*
külső ciklus vége.

A Mandelbrot és Mandelbar halmazok számítógépes ábrázolásánál igen szép színes szimmetrikus ábrákat kapunk. Forgásszimmetriákat és tükrös szimmetriákat fedezhetünk fel. Célunk annak a bebizonyítása, hogy valóban léteznek ezek a szimmetriák; viszont másfajta szimmetriák nem találhatók. Ezek leírásához a szabályos sokszögek egybevágósági transzformációinak a csoportját fogjuk felhasználni.

Mindenekelőtt érdemes megnézni néhány azonosan színezett pontot. Mivel egyedül a 0 hozza létre a csupa 0 sorozatot, ezért a 0 komplex szám egyedül önmagával ekvivalens. A következőben ettől az esettől mindig eltekintünk, azaz feltesszük, hogy $c \neq 0$. Azt nézzük meg, hogy mikor lesz a sorozat harmadik tagja (z_2) 0-val egyenlő.

A Mandelbrot esetben ez azt jelenti, hogy $c^p + c = 0$, azaz $c = \sqrt[p-1]{-1}$. Ekkor $z_3 = 0^p + c = c$ és ettől kezdve a sorozat elemei periodikusan ismétlődnek. Így $0, c, 0, c, 0, \ldots$ adódik sorozatként. A szóba jövő c komplex számok száma

[1] A komplex számokról olvashatnak pl. Borsányi Ákos cikkében, lapunk 1994/1 számában.

$p-1$. Az ezeket ábrázoló pontok mind az egységsugarú körön vannak. A $p=2$ esetben egyetlen ilyen pont van, a $p=3$ esetben a két pont a körvonal két átellenes pontja; egyébként pedig e pontok egy szabályos $p-1$ oldalú sokszög csúcsai. A $p<3$ esetben is szabályos $p-1$ oldalú sokszögről fogunk beszélni. Mivel ezek abszolút értéke megegyezik, ezért ekvivalens pontokat kaptunk. Ennek a $p-1$ pontnak tehát megegyezik a színe és ezek (elvileg) minden más ponttól eltérő színűek.

A Mandelbar esetben $z_2=0$ azt jelenti, hogy $\overline{c}^p+c=0$; ami azzal ekvivalens, hogy $c^p+\overline{c}=0$. Ebből ugyanúgy, mint a Mandelbrot esetben következik, hogy $0,c,0,c,0,\dots$ a kapott sorozat. Mivel $c^p=-\overline{c}$, ezért $|c|=|-\overline{c}|=|c^p|=|c|^p$, amiből $|c|=1$ következik. Eszerint ezek a pontok is egyszínűek; és színük minden más pont színétől eltér. A kiindulási feltétel tehát a $c^{p+1}=-c\overline{c}=-1$ egyenlőséghez vezet. Az előző esethez hasonlóan most egy $p+1$ oldalú szabályos sokszög csúcsait nyerjük.

A diédercsoportok

A sík egy szabályos n-szögét önmagába vivő egybevágósági transzformációi egy (véges) csoportot alkotnak. Ezt a csoportot n-edfokú diédercsoportnak nevezzük; e csoport jelölésére D_n használatos[1]l. Pálfy Péter Pál cikkét lapunk 1993/4 számában.. Jelölje r a sokszög középpontja körüli $2\pi/n$ szögű pozitív irányú forgatást és t a sokszög egy szimmetriatengelyére való tükrözést. Az identikus transzformációt e-vel jelöljük (ez a transzformáció tehát minden pontnak önmagát felelteti meg). Ezekkel a jelölésékkel:

$$D_n=\{e,r,r^2,\dots,r^{n-1},t,tr,tr^2,\dots,tr^{n-1}\}.$$

A D_n két f és g elemeinek szorzatán azt a h transzformációt értjük, amelyet úgy kapunk, hogy először a g transzformációt hajtjuk végre, majd utána az f-et. Más szóval úgy végezzük a szorzást, mint a függvényeknél. A számolási szabályokról elég annyit tudni, hogy:

Minden D_n-beli a-ra $ea=ae=a$.

$r^k=e$ pontosan akkor teljesül, ha n osztója k-nak.

$t^2=e$ és $r^it=tr^{n-i}$.

Mivel szabályos n-szög csak 2-nél nagyobb n esetén létezik, ezért ezekre az esetekre definiciónk valóságos tartalommal bír. Például a szabályos háromszög esetében kapott $D_3=\{e,r,r^2,t,tr,tr^2\}$ elemei:

e:az identitás, r:a középpont körüli $2\pi/3$ szögű pozitív forgatás, r^2:a középpont körüli $4\pi/3$ szögű pozitív forgatás, t:a t-vel jelölt tengelyre való tükrözés,

tr:a tr-rel jelölt tengelyre való tükrözés, tr^2:a tr^2-tel jelölt tengelyre való tükrözés.

$n=1$ és $n=2$ esetén a diédercsoportot a fenti halmazokkal:

$$D_1=\{e,t\},\qquad \text{illetve} \qquad D_2=\{e,r,t,tr\}$$

és a szereplő műveleti szabályokkal definiáljuk. Ezek is tekinthetők geometriai alakzatok szimmetriacsoportjának; D_1 például az „A" betűnek, D_2 pedig a „H" betűnek a szimmetriacsoportja.

A Mandelbrot halmazok szimmetriája

Tekintsük az $M(p)$ Mandelbrot halmazt, és nézzük a teljes szög $(p-1)$-ed részét, $\varphi=\dfrac{2\pi}{p-1}$-et. (Nem a p-edrészét!) Legyen r a komplex számsíknak az origó körüli φ szöggel való elforgatása, t a valós tengelyre való tükrözés, e pedig az identikus leképezés. Ekkor tetszőleges z komplex számra:

$$r(z)=\varepsilon\cdot z,\qquad (\varepsilon \text{ egy } (p-1)\text{-edik primitív egységgyök})t(z)=\overline{z},e(z)=z.$$

1. Állítás. *A fenti transzformációkkal képezett D_{p-1} szimmetriacsoport elemei az $M(p)$ halmaz minden egyes ekvivalenciaosztályát önmagára képezik.*

Bizonyítás. Legyen c az $M(p)$ szerinti valamelyik ekvivalenciaosztálynak eleme. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a

$$z_0=0,\dots,z_{n+1}=z_n^p+c,\dots v_0=0,\dots,v_{n+1}=v_n^p+\varepsilon\cdot c,\dots w_0=0,\dots,w_{n+1}=w_n^p+\overline{c},\dots$$

sorozatok n-edik tagjának abszolút értéke minden egyes rögzített n esetén megegyezik. Az abszolút értékre vonatkozó elemi tulajdonságok alapján elég annak a kimutatása, hogy minden n természetes számra $v_n=\varepsilon\cdot z_n$ és $w_n=\overline{z_n}$ teljesül. Ezt a két állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=0$ esetén mindkét állítás triviálisan igaz. Az első esetben az $\varepsilon^{p-1}=1$ egyenlőséget felhasználva

$$v_{n+1}=v_n^p+\varepsilon\cdot c=(\varepsilon\cdot z_n)^p+\varepsilon\cdot c=\varepsilon\cdot(\varepsilon^{p-1}\cdot z_n^p+c)=\varepsilon\cdot(z_n^p+c)=\varepsilon\cdot z_{n+1}$$

igazolja az indukciós lépést. A második esetben ez

$$w_{n+1} = w_n^p + \overline{c} = \overline{(z_n^p)} + \overline{c} = \overline{z_n^p + c} = \overline{z_{n+1}}$$

alapján következik.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy az $M(p)$ halmaznak nincs más szimmetriája. Pontosabban szólva ennél csak valamivel kevesebbet bizonyítunk be, nevezetesen azt, hogy a „kiszínezett” számsíknak nincs más szimmetriája, csupán a D_{p-1} elemei.

2. Állítás. *Ha f a komplex számsíknak olyan egybevágósági transzformációja, amely az $M(p)$-re definiált ekvivalenciarelációt megtartja, akkor létezik a D_{p-1}-nek olyan s eleme, amelyre $f = s$.*

Bizonyítás. Mivel a 0 komplex számot ábrázoló O pont egymagában alkot egy ekvivalencia osztályt, ezért $f(O) = O$. Tekintsük azt a $p-1$ pontot, amelyek azokat a komplex számokat ábrázolják, amelyekre a kapott sorozat harmadik eleme 0. Ezek a $P_1, \ldots, P_{p-1}$ pontok egy O középpontú szabályos $p-1$ oldalú sokszög sorrendben egymás után következő csúcsai. Mivel ezek az összes adott színű pontok, ezért f a fenti sokszöget önmagára képezi. Legyen $f(P_1) = P_i$ és tekintsük a diédercsoportnak azt az u forgatását, amelyikre $u(P_1) = P_i$ teljesül. Ekkor a $g = u^{-1}f$ egybevágósági transzformáció ugyancsak szimmetriája a színezett halmaznak, és g az O pontot is és a P_1 pontot is önmagába viszi. Az egybevágósági transzformációk ismert tulajdonságai alapján ez csak úgy lehetséges, ha g vagy az identitás vagy az OP_1 egyenesre való tükrözés. Mivel ezek mindegyike eleme a diédercsoportnak, ezért az $f = ug$ szorzat is a diédercsoport egy eleme.

A Mandelbar halmazok szimmetriája

Itt is két részből áll a bizonyítás:

Mindenekelőtt tekintsük az $\overline{M}(p)$ Mandelbar halmazt, és nézzük a teljes szög $(p+1)$-ed részét, $\varphi = \dfrac{2\pi}{p+1}$-et. Legyen r a komplex számsíknak az origó körüli φ szöggel való elforgatása, t a valós tengelyre való tükrözés, e pedig az identikus leképezés. Ekkor tetszőleges z komplex számra:

$$r(z) = \varepsilon \cdot z, \qquad (\varepsilon \text{ egy } (p+1)\text{-edik primitív egységgyök}) t(z) = \overline{z}, e(z) = z.$$

3. Állítás. *A fenti transzformációkkal képezett D_{p+1} szimmetriacsoport elemei az $\overline{M}(p)$ halmaz minden egyes ekvivalenciaosztályát önmagára képezik.*

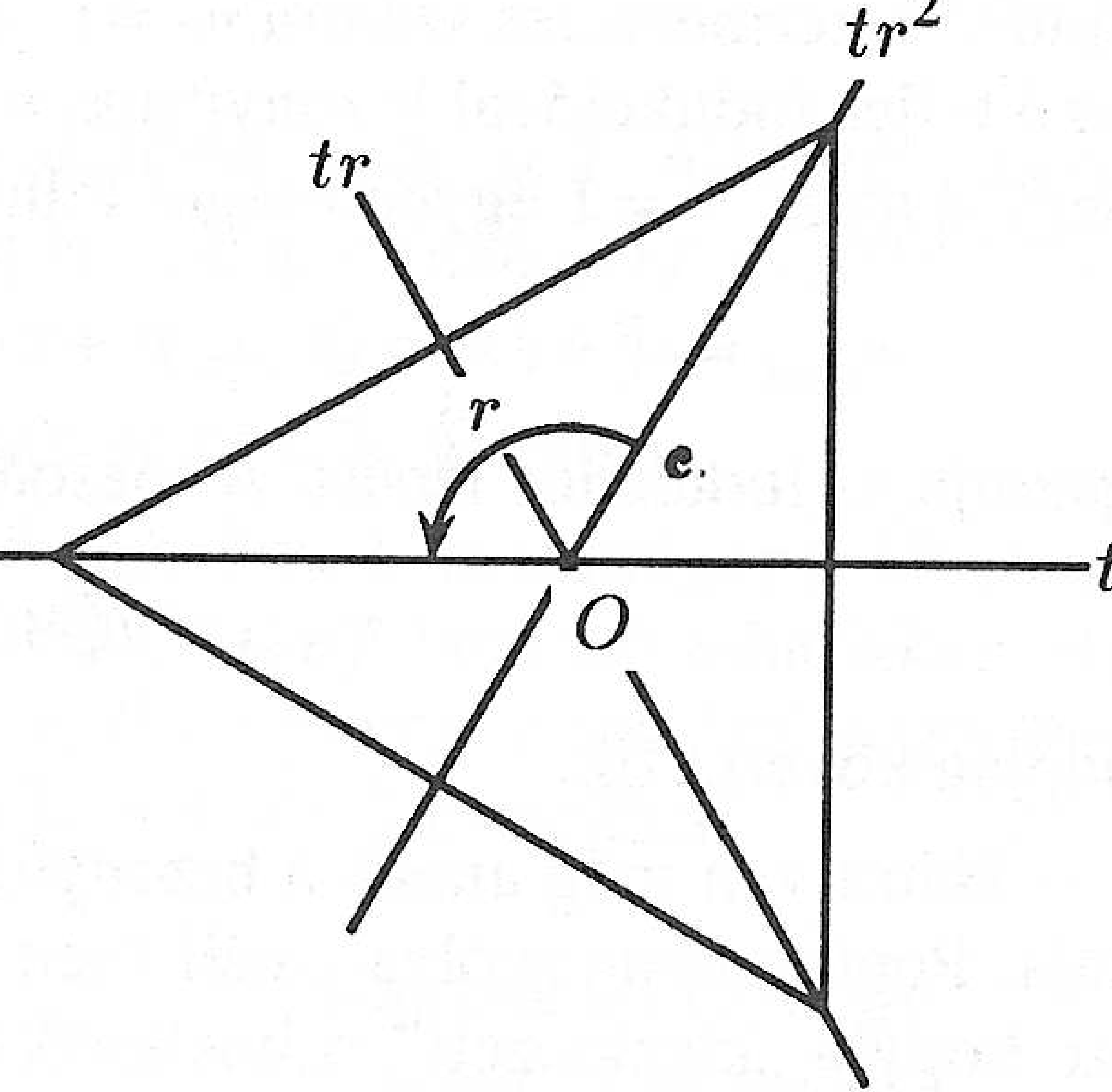
4. Állítás. *Ha f a komplex számsíknak olyan egybevágósági transzformációja, amely az $\overline{M}(p)$-re definiált ekvivalenciarelációt megtartja, akkor létezik a D_{p+1}-nek olyan s eleme, amelyre $f = s$.*

A 3. Állítás bizonyítása majdnem teljesen úgy történik, mint az 1. Állításé; csupán azt kell figyelembe venni, hogy tetszőleges z komplex szám esetén $\overline{(\varepsilon z)}^p = \varepsilon(\overline{\varepsilon}^{p+1}\overline{z}^p) = \varepsilon(\overline{z}^p)$.

A 4. Állítás bizonyítása viszont teljesen ugyanaz, mint a 2. Állításé.

A hátsó borítón látható ábrák a közölt „színező algoritmus” számítógépre alkalmazott változatával készültek minden esetben az $N = 50$ és $d = 2$ bemenő adatokkal. Az első sor két ábrája Mandelbar halmaz színezése $p = 2$, ill. 3 esetén, a további négy ábra Mandelbrot halmazoknak a színezését mutatja a $p = 2$, 3, 4, ill. 7 esetekben.

Rakonczai György
tanár, Budapest



tr^2
tr
r
$\mathbf{c}$.
t
O