1. Jelölje S a háromszög súlypontját. Ekkor $AS=24$, $CS=10$ egység, s mivel $AS^2+CS^2=24^2+10^2=26^2=AC^2$, azért az ASC háromszög derékszögű, területe $\frac{10\cdot 24}{2}=120$ területegység, az ABC háromszög területének harmada (miért?). A háromszög területe tehát 360 területegység. Az ASC derékszögű háromszögben $B_1C=\frac{1}{2}AC=13$ egység, ezért $BB_1=3\cdot SB_1=3\cdot B_1C=3\cdot 13=39$ egység.

2. A koszinusztétel alkalmazásával

$$ab\cos\gamma+bc\cos\alpha+ca\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Ha a feltételben pl. $d=c$, akkor

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=c^2,\qquad \text{azaz}\quad a^2+b^2=c^2,$$

tehát a háromszög valóban derékszögű.

Fordítva, ha a háromszög derékszögű és pl. az átfogó c, akkor $c^2=a^2+b^2$, tehát $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=c^2$.

3. a) Jelöljük 3^x-t y-nal. Egyenlőtlenségünkből

$$y^2-(\sqrt{3}-1)y-\sqrt{3}>0,\qquad \text{azaz}(y+1)(y-\sqrt{3})>0.$$

$(3^x+1)(3^x-\sqrt{3})>0$ pontosan akkor, ha $3^x>\sqrt{3}$, mivel $3^x+1>0$ minden valós x-re.

A 3^x függvény szigorúan monoton növekedése miatt $x>\frac{1}{2}$.

b) Azonos átalakításokkal ($\cos x\neq 0$) és az a)-ban alkalmazott szorzattá alakítással

$$\operatorname{tg}x^2+\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x-\sqrt{3}>0,(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})>0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}x<-1$ vagy $\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$. Az egyenlőtlenség megoldásai:

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi\quad\text{vagy}\quad\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\qquad k\in\mathbf{Z}.$$

4. Legyen az első elem a, a hányados q. A feltételek szerint $aq\cdot aq^5=1$, ezért $(aq^3)^2=1$, $aq^3=1$ vagy $aq^3=-1$, $q\neq 0$, valamint $aq^2-aq^4=\frac{3}{2}$, azaz $\frac{aq^3}{q}-aq^3\cdot q=\frac{3}{2}$.

Ha $aq^3=1$, akkor $\frac{1}{q}-q=\frac{3}{2}$, $q=-2$ vagy $q=\frac{1}{2}$; ha $q=-2$, akkor $a=-\frac{1}{8}$, ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a=8$.

Ha $aq^3=-1$, akkor $-\frac{1}{q}+q=\frac{3}{2}$, $q=2$ vagy $q=-\frac{1}{2}$; ha $q=2$, akkor $a=-\frac{1}{8}$, ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a=8$.

5. Az egyenlet $x>-1$, $x\neq 4$ esetén értelmezett. Ekvivalens átalakításokkal

$$2\log_2(x+1)+\log_2(x-4)^2=2\log_2 6.$$

A

$$\log_2(x+1)^2(x-4)^2=\log_2 6^2$$

egyenlet már következmény.

$$((x+1)(x-4))^2=6^2$$

pontosan akkor, ha

$$(x+1)(x-4)=6\qquad\text{vagy}\qquad(x+1)(x-4)=-6.$$

Az első egyenletből $x_1=5$, $x_2=-2$. Az x_1 megoldás, az x_2 nem.

A második egyenletből $x_3=1$, $x_4=2$ és mindkettő megoldása az egyenletnek.

(Az adott egyenlet $\log_2(x+1)+\log_2|x-4|=\log_2 6$ alakban is írható.)

6. Legyen $P(x;y)$ a keresett pont. A feltételek szerint $(x-2)^2+(y-3)^2=36+49$ és $x^2+(y-1)^2=16+49$. A második egyenletből vonjuk ki az első egyenletet.

$$4x-4+4y-8=-20,$$
$$x+y=-2,$$
$$y=-x-2,$$

így

$$x^2+(-x-3)^2=65,$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -7, \quad y_1 = -6, \quad y_2 = 5,$$

tehát két megfelelő pont van: $P_1(4; -6)$ és $P_2(-7; 5)$.

7. Mivel $0 \le \sin^2 \alpha \le 1$, azért $0 \le 2\sin^2 \frac{y+x^2}{4} \le 2$. Ismeretes, hogy ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \ge 2$, és az egyenlőség csak az $a = 1$ esetben teljesül. Most $3^x > 0$ és $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$, tehát $3^x + \frac{1}{3}^x \ge 2$. Az egyenletnek csak azok az $(x; y)$ számpárok a megoldásai, amelyekre $3^x + \frac{1}{3^x} = 2$ és $\sin^2 \frac{y+x^2}{4} = 1$. Ezek szerint $3^x = 1$, $x = 0$, tehát $\sin^2 \frac{y}{4} = 1$, amiből $\frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{2} = 1$, $\cos \frac{y}{2} = -1$, $\frac{y}{2} = \pi + 2k\pi$, $y_k = 2\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. A egyenlet megoldásai az $x_k = 0$, $y_k = 2\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ számpárok.

8. Az $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)$ azonosságból adódik, hogy $a - b$ osztója $(a^n - b^n)$-nek, ha $n \in \mathbf{N}^+$, valamint a és b egész számok.

a) Az adott kifejezést átalakíthatjuk.

$$5^n(4n-1) + 1 = 4 \cdot n \cdot 5^n - 5^n + 1 = 4(\underbrace{5^n + 5^n + \cdots + 5^n}_{n \text{ darab}}) - (5^n - 1^n).$$

Mivel $5^n - 1^n = (5-1)\left(5^{n-1} + 5^{n-2} + \cdots + 5 + 1\right)$, azért a kifejezést tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} 4\left(\left(5^n - 5^{n-1}\right) + \left(5^n - 5^{n-2}\right) + \cdots + (5^n - 5) + (5^n - 1^n)\right) = \\ = 4\left(5^{n-1}(5-1) + 5^{n-2}(5^2-1) + \cdots + 5\left(5^{n-1} - 1\right) + (5-1) \cdot K\right) = \\ = 4 \cdot 4 \cdot L = 16L, \end{gathered}$$

ahol K és L pozitív egész szám. Ez azt jelenti, hogy a kifejezés 16 többszöröse, tehát valóban osztható 16-tal. (Az állítás teljes indukcióval is igazolható.)

b)

$$n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n = n^2(n^2-1) + 2n(n^2-1) == (n^2-1)(n^2+2n) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2),$$

négy, egymást követő természetes szám szorzata, tehát osztható 24-gyel (miért?).

$$252^n - 2^n = (252-2)K = 250 \cdot K = 2 \cdot 5^3 \cdot K,$$

ahol $K \in \mathbf{N}^+$. Így az adott kifejezés valóban osztható 6000-rel, hiszen

$$2 \cdot 5^3 \cdot K \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot L = 10^3 \cdot 6KL = 6000 \cdot KL.$$

Rábai Imre