

1. Az  $ABC$  háromszögben  $AC = 26$  egység, az  $AA_1$ , illetve a  $CC_1$  súlyvonal hossza  $36$ , illetve  $15$  egység. Számítsa ki a háromszög területét és a  $BB_1$  súlyvonal hosszát.

2. Legyen – a szokott jelölés szerint – egy háromszög három oldala  $a$ ,  $b$  és  $c$ , az oldalakkal szemközti szögek rendre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Igazolja, hogy a háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha

$$ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ca \cos \beta = d^2,$$

ahol  $d$  az  $a$ ,  $b$ , illetve  $c$  oldalak közül valamelyikkel egyenlő.

2

3. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a)  $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$ ; b)  $\frac{\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x}{\cos^2 x} > \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1)$ .

4. Egy mértani sorozat második és hatodik elemének szorzata  $1$ , a harmadik és az ötödik elem különbsége  $\frac{3}{2}$ . Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát.

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_2(x+1) + \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 8x + 16) = 1 + \log_2 3$$

egyenletet.

6. Melyek a síknak azok a pontjai, amelyekből az  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$  és az  $x^2 + (y-1)^2 = 16$  egyenletű körökhöz egyaránt  $7$  egység hosszú érintőszakaszok húzhatók?

7. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$2 \sin^2 \frac{y+x^2}{4} = 3^x + 3^{-x}$$

egyenletet.

8. Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  pozitív egész szám, akkor

a)  $16$  osztója az  $5^n(4n-1)+1$ ,

b)  $6000$  osztója a  $(252^n - 2^n)(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n)$

kifejezésnek.

Rábai Imre