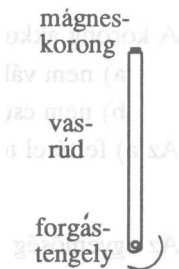


Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1993. október 15-én tartotta 70. Eötvös versenyt Budapesten és 11 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és a középiskolai tanulók részére. A versenyzők – bármilyen segédeszköz felhasználásával – 5 órás munkaidő alatt három fizikai feladatot oldhattak meg. A versenyben 271 tanuló adott be értékelhető dolgozatot. Ismertetjük a feladatokat, azok megoldását és a verseny eredményét.

1. Egyik végén átmenő, vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat egy hosszú vasrúd. A rúd másik vége a rúd hossz tengelyére merőleges sík.

A rudat közel függőleges helyzetbe hozzuk, a felső végére kicsiny mágneskorongot illesztünk, majd elengedjük őket.



1. ábra

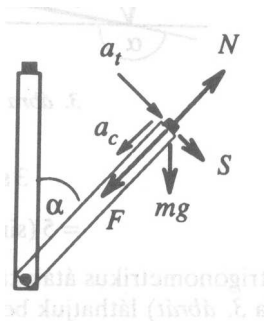
A korongra ható nehézségi erőnek legalább hányszorosa kell legyen a korong és a rúd között fellépő mágneses vonzóerő, hogy a mozgás során a korong ne mozduljon el a rúdhöz képest?

A tapadási súrlódási együttható $\mu_0 = 1/6$.

(Varga István)

Megoldás. A feladat megoldásához a korongra és a rúdra felírt mozgásegyenleteket, valamint a munkatételt fogjuk felhasználni, miközben figyelembe vesszük a korong mozgására kirótt megkötéseket.

A 2. ábrán a korongra ható erőket tüntettük fel: \vec{N} az érintkezési felületre merőleges nyomóerő, $m\vec{g}$ a nehézségi erő, \vec{S} a súrlódási erő, \vec{F} pedig a rúd irányú mágneses vonzóerő.



2. ábra

A korong mozgásegyenletei:

$$S + mg \sin \alpha = ma_t,$$

$$F + mg \cos \alpha - N = ma_c,$$

ahol $a_t = l\beta$ az érintőleges (tangenciális) gyorsulás $a_c = l\omega^2$ a korong sugárirányú (centripetális) gyorsulása, l pedig a rúd hosszát jelöli.

A rendszer β szöggyorsulását és ω szögsebességét a forgómozgás dinamikai alapegyenletéből, illetve a munkatételből kaphatjuk meg. Tekintettel arra, hogy a *kicsiny* mágnes m tömege elhanyagolható a rúd M tömegéhez képest, elegendő a rúdra vonatkozó összefüggéseket felírni:

$$Mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{1}{3} ML^2 \beta, \text{ tehát } \beta = \frac{3g}{2l} \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \omega^2 = Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha \right),$$

innen

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (1 - \cos \alpha).$$

Ezekből az egyenletekből adódik, hogy

$$N = F + mg(4 \cos \alpha - 3),$$

$$S = \frac{1}{2}mg \sin \alpha.$$

A korong akkor nem mozdul el a rúdhoz képest, ha

a) nem válik el a rúdtól; ennek feltétele: $N > 0$;

b) nem csúszik meg; ennek feltétele: $|S| \leq \nu_0 N$

Az a) feltétel teljesül, ha

$$F > mg(3 - 4 \cos \alpha) \geq 7mg.$$

Az egyenlőség $\alpha = \pi$ -nél, vagyis a függőlegesen lefelé mutató rúdnál áll fenn.

A b) feltétel szerint $\nu_0 N = N/6 \geq S$, ami S és N korábban kiszámított kifejezéseinek felhasználásával

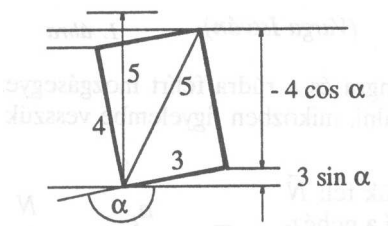
$$\frac{F}{mg} \geq 3 + (3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha)$$

alakra hozható. A jobb oldalon a zárójelben álló kifejezés nem lehet nagyobb 5-nél és a maximális értéket $\text{tg} \alpha_0 = -4/3$, azaz $\alpha = \alpha_0 \approx 143^\circ$ -nál éri el. Ezt az állítást a differenciálszámítás képletei segítségével, vagy a

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha &= 5 \left(\frac{3}{5} \sin \alpha - \frac{4}{5} \cos \alpha \right) = \\ &= 5(\sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos \alpha_0 \cos \alpha) = 5 \cos(\alpha - \alpha_0) \leq 5 \end{aligned}$$

trigonometrikus átalakítás felhasználásával, esetleg elemi geometriai módszerrel (lásd a 3. ábrát) láthatjuk be. A korong tehát akkor nem csúszik meg a rúdon, ha

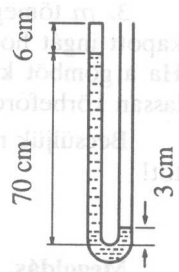
$$F \geq 8mg.$$



3. ábra

Látható, hogy a b)feltétel, vagyis a megcsúszást tiltó egyenlőtlenség az erősebb. Összefoglalva: a korong biztosan nem mozdul el a rúdhoz képest, ha a mágneses vonzóerő a korongra ható nehézségi erőnek *legalább nyolcszorosa*.

2. U alakú üvegcső mindkét szára 76 cm magas. A bal oldali szár zárt, a jobb oldali nyitott. A csőben higany helyezkedik el, a 4. ábrán látható módon. A higany egyensúlyban van, mert a bal oldali szárnál a higany fölött egy kis levegő is van. A hőmérséklet 300 K, a külső légnyomás 76 Hgcm.



4. ábra

Lezárjuk a jobb oldali szárat, az egész berendezést 450 K-re melegítjük, majd visszahűtjük 300 K-re. Ezek után hogyan fog elhelyezkedni a higany?

(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A jobb oldali szár lezárásakor a jobb oldali szárban a levegő nyomása $p_1 = 76\text{Hgcm}$, az üvegcső alján tehát 79Hgcm a higany nyomása, a bal oldali szárban levő levegő nyomása pedig $p_2 = 79\text{Hgcm} - 70\text{Hgcm} = 9\text{Hgcm}$. A rendszert melegítve mindkét szárban levő levegő nyomása megnő. Ha valamilyen ok miatt a higany nem tudna elmozdulni, akkor a gáznyomások növekedése (izochor folyamatban) az eredeti nyomással egyenes arányban állna. Mivel $p_1 > p_2$, a bal oldali szárban a nyomás növekedése nagyobb lenne, mint a jobb oldaliban, tehát a higany (amely természetesen el tud mozdulni), a melegítés során a jobb oldali szárban lesüllyed, a bal oldaliban pedig felemelkedik.

Amennyiben a higanyszint a jobb oldali szárban annyira lesüllyed, hogy eléri a kanyarulatot, akkor a további melegítés hatására a levegő egy része „átbugyborékol” a bal oldali szárba. (A 4. ábra szerint a higany felszíne majdnem sík. Ez arra utal, hogy az üvegcső nem tekinthető kapillárisnak, a levegő nem képes a kanyarulatban is maga előtt „tolni” a higanyszálat.)

Elvileg két lehetőség képzelhető el: a) Ha a rendszert „elegendően” felmelegítjük, az átbugyborékolás biztosan bekövetkezik. Ilyenkor a berendezés visszahűtése után a bal oldali szárban több levegő lesz, mint kezdetben volt, tehát az eredeti hőmérsékleten a bal oldali levegőoszlop 6 cm-nél hosszabb lesz.

b) Ha a berendezést nem melegítjük fel annyira, hogy levegő bugyborékoljon át a kanyarulatban, akkor a visszahűtés után a rendszer minden részének valamennyi állapotjelzője megegyezik a kezdeti értékekkel, tehát a higany ugyanúgy fog elhelyezkedni, mint eredetileg.

A két lehetőség között a konkrét adatokkal elvégzett számolás dönt. Ha a levegő hőtágulását figyelembe vesszük, de az üvegnek és a higanynak a gázokhoz képest jóval kisebb hőtágulását elhanyagoljuk, akkor az adódik, hogy a 450K -re való felmelegítés elegendő ahhoz, hogy levegő bugyborékoljon át a bal oldali szárba. A gáztörvényeket, illetve a higany egyensúlyi feltételét felírva azt kapjuk, hogy a jobb oldali higanyszint $T = 398,2\text{K}$ hőmérsékletnél eléri a kanyarulatot, bizonyos mennyiségű levegő átbugyborékol, majd a visszahűtés után a higanyszint a jobb oldalon az eredeti állapothoz képest $6,8\text{mm}$ -rel magasabbra kerül.

Ha a higany és az üvegcső hőtágulását is figyelembe vesszük, akkor (a táblázatbeli hőtágulási együtthatókkal) az adódik, hogy a melegítés során a jobb oldali higanyszint csak 22mm -t süllyed, tehát *nem éri el* a kanyarulatot! A rendszer lehűtése után tehát minden tekintetben visszaáll a kezdőállapot, a higanyszintek pontosan ott fognak megállapodni, ahol a felmelegítés előtt voltak.

(A Versenybizottság – kellő indoklás esetén – mindkét megoldást elfogadta.)

3. m tömegű, Q elektromos töltésű kicsiny gömböt fonálra függesztünk. Az így kapott ingát homogén, függőleges irányú, B indukciójú mágneses térbe helyezük. Ha a gömböt kissé meglökjük, lengésbe jön. Azt tapasztaljuk, hogy a lengés síkja lassan körbefordul.

Becsüljük meg, hogy mennyi idő alatt tesz meg a lengés síkja egy teljes fordulatot!

(Tichy Géza)

Megoldás. A nyugalmi helyzetétől mért \vec{r} helyen lévő, \vec{v} sebességgel mozgó gömbre a fonálerő, a nehézségi erő és a mágneses tér okozta *Lorentz-erő* hat. Kicsiny kitérés esetén a mozgás jó közelítéssel síkmozgásnak tekinthető. Az ingamozgásnál szokásos közelítéseket alkalmazva a fonálerőnek a mozgás (vízszintes) síkjába eső vetülete $-m\omega^2\vec{r}$, ahol ω a fonálinga mágneses mező nélküli körfrekvenciája ($\omega = \sqrt{g/l}$). A gömb mozgásegyenlete a mágneses mező jelenlétében:

$$(1) \quad m\vec{a} = Q\vec{v} \times \vec{B} - m\vec{r}\omega^2.$$

Ez az egyenlet az \vec{r} -re vonatkozó differenciálegyenlet, pontosabban: az \vec{r} vektor derékszögű komponensei között fennálló csatolt differenciálegyenlet-rendszer, melynek általános megoldása felsőbb matematikai ismereteket igényel.

A feladatot középiskolai szinten (tehát a differenciálegyenleteket matematikai elméletére való hivatkozás nélkül) is meg lehet oldani, ha felismerjük az (1) egyenlet és a közönséges síkinga forgó koordináta-rendszerből történő leírása (*Foucault-inga*, az Északi sarkon) közötti hasonlóságot. Ha egy ω_0 körfrekvenciával jellemzhető síkinga kis amplitúdójú lengéseit egy olyan koordináta-rendszerből akarjuk leírni, amely $\vec{\Omega}$ szögsebességgel forog az inerciarendszerhez képest ($\vec{\Omega}$ függőleges vektor), akkor a következő (a *Coriolis-erőt* és a centrifugális erőt is figyelembe vevő) mozgásegyenletet kell tanulmányoznunk.

$$(2) \quad m\vec{a} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} - m\vec{r}\omega_0^2 + m\vec{r}\Omega^2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldását azonban ismerjük: mivel a lengés síkja az inerciarendszerben állandó, a forgó koordináta-rendszerhez képest $\vec{\Omega}$ szögsebességgel forog, tehát $T = 2\pi/\Omega$ idő alatt tesz meg egy teljes fordulatot. Az (1) és (2) egyenleteket összehasonlítva láthatjuk, hogy $\vec{\Omega} = Q\vec{B}/(2m)$. (ω_0 is kifejezhető a feladat többi paraméterével,)

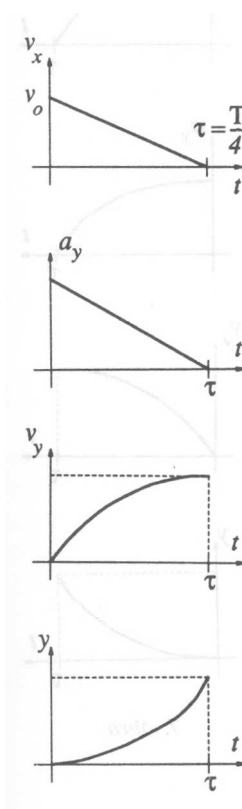
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \left(\frac{QB}{2m}\right)^2},$$

de ez számunkra most érdektelen.) A lengési sík tehát a mágneses mező hatására

$$T = 4\pi \frac{m}{QB}$$

idő alatt fordul teljesen körbe. (Érdekes, hogy a körülfordulás ideje csupán a kis gömb adataitól és a mágneses mező erősségétől függ, az inga lengési periódusidejétől viszont nem.)

Ha nem törekszünk ennyire pontos eredményre, hanem csak becslést akarunk adni a körülfordulás idejére (a feladat szövege is csak ezt igényli!), akkor elegendő a probléma közelítő megoldását megadni. A továbbiakban erre látunk három különböző példát.



5. ábra

Első közelítésként tételezzük fel, hogy az x tengely irányában v_0 sebességgel meglökött gömb (5. ábra) v_x sebessége egy negyed lengési periódus, $\tau = T_{leng}/4$ idő alatt egyenletesen lassulva, az idő lineáris függvénye szerint változva csökken zérusra:

$$v_x(t) = v_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Ekkor a kezdősebességre merőleges (y irányú) gyorsulás is lineáris függvény

$$a_y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

a megfelelő sebesség és elmozdulás pedig (a hatványfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályokat alkalmazva):

$$v_y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right),$$

$$y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\tau}\right).$$

A maximális kitérés x irányban:

$$x_{max} = \frac{v_0\tau}{2},$$

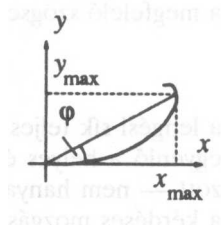
ezalatt y irányban a gömb elmozdulása

$$y_{max} = Qv_0B \frac{\tau^2}{3m}.$$

(Vigyázat: y_{max} nem a legnagyobb elmozdulás y irányban, hiszen $t = \tau$ pillanatban, amikor a test x irányú sebessége előjelet vált, a y irányú sebesség még nem csökkent le nullára, sőt, éppen maximális.) A lengési sík (kicsinynek feltételezett φ elfordulási szögére a

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_{max}}{x_{max}}$$

becslés adható (6. ábra). A sík forgásának szögsebessége: $\omega = \varphi/\tau$, a körülfordulás ideje pedig $T_1 = 3\pi m/(QB)$, ami a pontos érték $3/4$ része.



6. ábra

Második közelítésben tegyük fel, hogy a gömb v_x sebessége koszinusz függvény szerint csökken nullára (7. ábra):

$$v_x(t) = v_0 \cos \frac{\pi t}{2\tau}.$$

A rezgőmozgás ismert képleteit alkalmazva megfelelő elmozdulás

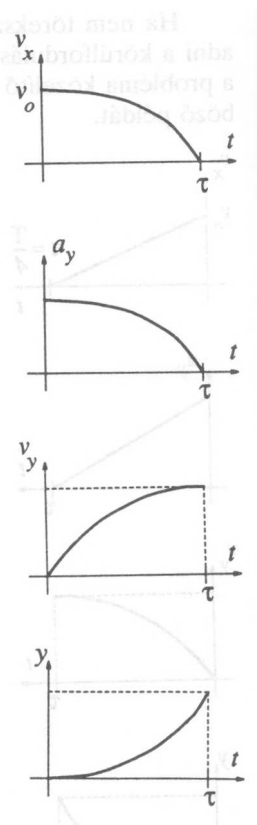
$$x(t) = \frac{2v_0\tau}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2\tau},$$

az y irányú gyorsulás, sebesség és elmozdulás pedig

$$a_y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \cos \frac{\pi t}{2\tau},$$

$$v_y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \cdot \frac{2\tau}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2\tau},$$

$$y(t) = \frac{Qv_0B}{m} \cdot \left(\frac{2\tau}{\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi t}{2\tau}\right).$$



7. ábra

Az előző közelítésben alkalmazott gondolatmenetet követve kiszámítjuk a negyed periódus utáni φ szögelfordulást, ebből a szögsebességet, végül pedig a teljes körülfordulási időt, amire $T_2 = \pi^2 m / (QB)$, a pontos érték $\pi/4$ -szerese adódik.

Harmadik közelítésünk az előzőktől lényegesen eltérő gondolatmenetre támaszkodik. Ne vizsgáljuk a lengés negyed periódusát, szorítkozunk csak a meglökést követő igen rövid Δt időtartamra! A megfelelő irányú elmozdulások az egyenletes, illetve a rövid idő alatt állandónak tekinthető Lorentz-erőnek megfelelő egyenletesen változó mozgás képletei szerint

$$\Delta x = v_0 \Delta t,$$

$$\Delta y = \frac{Qv_0B}{2m}(\Delta t)^2.$$

A szögelfordulás nagysága ezalatt

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{QB}{2m} \Delta t,$$

a megfelelő szögsebesség

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{QB}{2m},$$

a lengési sík teljes körülfordulási ideje pedig $T_3 = 4\pi m/(QB)$. Ez az idő pontosan egyenlő a helyes értékkel, ami nem véletlen, hiszen most – az adott keretek között – nem hanyagoltunk el semmi lényegeset. Ez a megoldás mégsem tekinthető a kérdéses mozgás teljes leírásának, hiszen nem bizonyítja, hogy a lengési sík elfordulásának szögsebessége időben állandó. Ha valahonnan tudjuk, hogy az elfordulás egyenletes, akkor annak ütemét meghatározhatjuk a mozgás kezdeti, nagyon rövid szakaszából, de ha ebből az értékből a mozgás későbbi menetére következtethetünk, az csak becslésnek tekinthető.

A verseny eredménye

I. díjat nyert a verseny 1. helyezettje: Katz Sándor, az ELTE fizikus hallgatója, aki Bonyhádon érettségizett a Petőfi Sándor Evangélikus Gimnáziumban, mint *Erdélyesi János, Jurisits József és Kotek László* tanítványa.

II. díjat nyert a verseny 2 – 6. helyezettje: 2. Veres Gábor, az ELTE fizikus hallgatója, aki Balassagyarmaton érettségizett a Balassi Bálint Gimnáziumban, mint *Bognár Mihályné és Fűrész István* tanítványa. **3. Prohászka Zoltán**, a budapesti Veres Pálné Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Oporné Fodor Mária* tanítványa. **4. Gefferth András**, a BME informatika szakos hallgatója, aki Budapesten érettségizett a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban, mint *Horváth Gábor* tanítványa. **5. Futó Gábor**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa. **6. Burcsi Péter**, a pápai Türr István Gimnázium és Óvónői Szakközépiskola II. osztályos tanulója, *Németh Zsolt* tanítványa.

III. díjat nyert a verseny 7-11. helyezettje: 7. Kovács Krisztián, a békéscsabai Kemény Gábor Műszaki Szakközépiskola III. osztályos tanulója, *Mekis László* tanítványa. **8. Varga Dezső**, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója, *id. Szabó Kálmán* tanítványa. **9. Székely Sándor**, a BME informatikus szakos hallgatója, aki Kecskeméten érettségizett a Katona József Gimnáziumban, mint *Németh Ágnes* tanítványa. **10. Költl Péter**, a győri Révai Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Székely László* tanítványa. **11. Farkas Zénó**, az ELTE fizikus hallgatója, aki Győrben érettségizett a Révai Miklós Gimnáziumban, mint *Takács István* tanítványa.

A bíráló bizottság (Radnai Gyula (elnök), Károlyházy Frigyes, Gnädig Péter) a beérkezett dolgozatok közül csak ezt a 11 dolgozatot díjazta, a többi nem rangsorolta. Az első díjjal 6000 Ft, a másodikkal 3000 Ft, a harmadikkal 2000 Ft pénzjutalom is járt az Eötvös Loránd Fizikai Társulat jóvoltából.

Gratulálunk a nyerteseknek!

Radnai Gyula