

A feladatok megoldása és a részletes végeredmények megjelennek az Országos Köznevelési Szolgálat Irodájában, Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny Matematikából 1993/94. tanév című kiadványában. A kiadvány megrendelhető Lajos Józsefnétől (OKSZI, 1054, Budapest, Báthori u. 10.). Levélcím: 1399, Budapest, pf. 701/432.

I. KATEGÓRIA (A szakközépiskolák tanulói)

Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg a pozitív számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$(1) \quad x + y + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{240}{x-y},$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 = 353.$$

2. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögfelezője AD (D a BC oldalon van). Az ABD háromszög beírt körének középpontja azonos az ABC háromszög köré írt körének középpontjával.

Mekkora az ABC háromszög szögei?

3. Egy vizsgán 20 kérdésre kellett válaszolni. Az értékeléskor minden jó válasz 5–5 pontot ért, viszont minden rossz válasz esetén 2–2 pontot levontak. Ha egy kérdésre a vizsgázó nem válaszolt, akkor arra 0 pontot kapott. Így valamelyik vizsgázó 48 pontot gyűjtött.

Hány jó választ adott?

4. Az ábrán szereplő $ABCD$ és $EFGH$ paralelogrammák területe egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy CE párhuzamos FB -vel!

5. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = 3n^2 + 3n + 7$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) képlettel definiált sorozat öt egymás után következő tagja között mindig van olyan tag, amelyik 5-tel osztható!

6. Legyen $0 < x < 2\pi$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq \sin^2 x + \sin x \cos x \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Az x változó mely értékeinél (értékeinél) áll fenn egyenlőség?

Második forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_x^2 6 + \log_{\frac{2}{6}}^2 \left(\frac{1}{x} \right) + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{6} \right) + \log_{\sqrt{6}} x = -\frac{3}{4}.$$

2. Egy síkbeli konvex ötszög csúcsai legyenek az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok. Az $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ szakaszok felezőpontjai rendre a B_1, B_2, B_3, B_4 pontok. Végül a B_1B_3 és a B_2B_4 szakaszok felezőpontja a C_1 , illetve a C_2 pont. Milyen arányban metszik egymást az A_1C_2 és az A_5C_1 szakaszok?

3. Hány gyöke lehet az

$$|x^2 + 6x + 8| = x + p$$

egyenletnek?

Hogyan függ a gyökök száma a p paraméter értékétől?

4. Az $ABCD$ konvex négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre osztja. Az AC átlón felvett M (belső) ponton át az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a BC oldalt a P pontban, az M ponton átmenő és a CD -vel párhuzamos egyenes az AD oldalt a Q pontban metszi.

a) Igazoljuk, hogy $\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$.

b) Hogyan kell az M pontot megválasztani, hogy az MPC és az MQA háromszögek területeinek összege minimális legyen?

5. 1993 darab különböző valós szám közül bármelyik 997 darab számot kiválasztva és összeadva, a kapott összeg nagyobb a maradék 996 darab szám összegénél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az adott 1993 darab szám mindegyike pozitív!

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24 = 0$ egyenletről tudjuk, hogy négy valós gyöke van, és két gyökének összege 0. Oldjuk meg az egyenletet!
2. Jelölje a téglatest felszínét A , testátlójának a hosszát d , továbbá legyen $k \geq 2$ tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$kd^2 - A$$

sohasem lehet negatív.

3. A síkbeli koordináta-rendszerben egy derékszögű háromszög csúspontjai legyenek $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $C(0; 0)$, ahol a és b pozitív racionális számok. A háromszög N belső pontját válasszuk meg úgy, hogy

$$NCA \triangleleft = NAB \triangleleft = NBC \triangleleft$$

teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy az N pont koordinátái is racionális számok!

II. KATEGÓRIA (Nem speciális matematika tantervű gimnáziumok tanulói)

Első (iskolai) forduló

1. Az ABC derékszögű háromszög AC befogója egy kocka élével, BC befogója pedig a kocka lapátlójával egyenlő hosszú. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!
2. Adjuk meg azokat a pozitív egészekből álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek megoldásai a következő egyenletnek:

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 25.$$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$|1 - \sqrt{x-2}| \cdot (x^2 + 4x - 3) = 1.$$

4. Az AB körív F felezőpontján átmenő egyenes a körívet másodszor az F és B közötti M pontban metszi. Az F pontból az AM egyenesre állított merőleges talppontját jelölje K . Bizonyítsuk be, hogy $AK = (AM + MB)/2$.

5. Legyen $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ és

$$P_n = \frac{S_2}{S_2 - 1} \cdot \frac{S_3}{S_3 - 1} \cdot \frac{S_4}{S_4 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{S_n}{S_n - 1}.$$

Határozzuk meg azt a legkisebb n értékét, amelyre $P_n > 2,99$.

Második forduló

1. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek oldalai: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; $A_1B_1 = c_1$, $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek akkor és csak akkor hasonlók, ha

$$(3) \quad \sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

2. a) Állítsuk elő az 1993^{1995} hatványt egynél több egymást követő pozitív páratlan szám összegeként.
b) Legalább hány tagú az ilyen összeg?

3. Adott az $ABCD$ tetraéder. A tér egy P pontjának merőleges vetülete az AB egyenesen P_1 , a CD egyenesen P_2 . Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre az

$$AP_1^2 + BP_1^2 + CP_2^2 + DP_2^2$$

összeg minimális.

4. Milyen valós x értékekre teljesül a

$$\sqrt{x+3} + 6\sqrt{x-3} = 7\sqrt[6]{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$$

egyenlőség?

Harmadik (döntő) forduló

1. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $[0;6]$ intervallum olyan számai, amelyekre teljesül a

$$P = x_1 x_2 \dots x_n = (6 - x_1)^2 (6 - x_2)^2 \dots (6 - x_n)^2$$

egyenlőség. Határozzuk meg P maximumát.

2. Egy téglatest alaplapja az $ABCD$, fedőlapja az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 párhuzamos élek. Az $AB = c$ él hossza rögzített, az AD és AA_1 élek hossza változhat. Az A csúcsot tartalmazó és a BD_1 testátlóra merőleges γ sík a téglatestet két egyenlő térfogatú részre vágja szét. Legfeljebb mekkora lehet a γ által a téglatestből kimetszett sokszög területe?

3. Legyen N olyan 16-jegyű pozitív egész, amelynek jegyei között a 0, 1, 4, 9 nem fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy N -nek van néhány olyan egymást követő számjegye, amelyek szorzata négyzetszám.

Igaz-e a feladat állítása a fenti típusú 15-jegyű számokra is?

III. KATEGÓRIA

(A gimnáziumok speciális matematika tantervű osztályainak tanulói)

Első (iskolai) forduló

1. Egy egység oldalú négyzetben két kör helyezkedik el, amelyeknek nincs közös belső pontja (egymást kívülről, ill. a négyzet határát belülről érinthetik). Mennyi a kerületük összegének a lehető legnagyobb értéke?

2. Hány olyan legfeljebb 10-jegyű pozitív egész szám van, amely osztható negyzetgyökének (alsó) egészrészével? (Pl. a 12 ilyen, mert $\lfloor \sqrt{12} \rfloor = 3$ osztója a 12-nek, de a 22 nem ilyen, mert $\lfloor \sqrt{22} \rfloor = 4$ nem osztója a 22-nek.)

3. Eszternek és Zsófinak 3–3 forintja van. Egy szabályos érmével dobálnak, fej esetén Eszter kap Zsófitól 1 forintot, írás esetén pedig Zsófi kap Esztertől 1 forintot. Addig játszanak, amíg valamelyikük pénze elfogy. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 100 dobásra sor kerül?

4. Legyen f olyan nemkonstans valós együtthatós polinom, amellyel minden x, y valós számra

$$f(x)f(y) \leq f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy f -nek pontosan egy valós gyöke van.

5. Egy 1993 szögpontú teljes gráf minden élét színezzük úgy, hogy semelyik csúcsba sem fut két azonos színű él. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van 17 olyan pont, amelyek közül bármelyik kettőt különböző színű él köt össze.

Második (döntő) forduló

1. Tekintsük az 1994 dimenziós vektorokat, azaz azokat az $(a_1, a_2, \dots, a_{1994})$ szám-1994-eseket, ahol az a_i „koordináták” tetszőleges valós számok. Nevezzünk egy ilyen vektort „bumfordi”-nek, ha a koordinátái között legfeljebb két különböző érték fordul elő (azaz például minden koordinátája -1 vagy $\sqrt{2}$). Legkevesebb hány bumfordi vektor összegeként állítható elő az $(1, 2, \dots, 1994)$?

2. Egy egységnyi sugarú kört kívülről érintenek a k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 és k_6 körök (az érintési pontok ebben a sorrendben követik egymást az egységkörvonalon), továbbá k_i és k_{i+1} egymást is érintik kívülről ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). A k_i kör sugara r_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Mutassuk meg, hogy ha $r_{i+2} = r_{i+1}/r_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) teljesül, akkor k_1 és k_6 is kívülről érintik egymást.

3. Egy tetszőleges m pozitív egészhez vegyünk minden lehetséges módon olyan $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ egészeket, amelyekre $a_1 = m$ és az $a_1 a_2 \dots a_t$ szorzat négyzetszám ($t = 1$ is megengedett). Jelöljük $S(m)$ -mel a_t lehető legkisebb értékét. Például $S(1) = 1$, $S(2) = 6$, mert $m = 2$ esetén a $2 \cdot 3 \cdot 6$ szorzat a legjobb választás, $S(3) = 8$, $S(4) = 4$ stb.

Bizonyítsuk be, hogy az $S(2), S(3), S(4), \dots$ sorozatban éppen a pozitív összetett számok szerepelnek, és pedig mindegyik pontosan egyszer fordul elő.

Az 1993–94. évi matematika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny eredményei

I. kategória

(A szakközépiskolák tanulói)

1. **Halasi Zoltán**, IV.o., Barcs, Erdészeti és Vízgazdálkodási Szki, tanára: Lőrincz Csabáne;
2. **Nagy Gábor**, IV.o., Budapest, Kolos Richárd Műszaki Szki, tanára: Karády Györgyné;
3. **Szabadi Péter**, II.o., Paks, Energetikai Szakképzési Intézet, tanára: Árokszállási Eszter, Árokszállási Tibor;
4. **Antos József**, IV.o., Budapest, Egressy Gábor Ipari Szki, tanára: Oros Lukácsné;
5. **Krizsán Csaba**, IV.o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola, tanára: Benedek Ilona;
6. **Novák András**, III.o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki, tanára: Szenesné Durucz Anna;
7. **Antal György**, IV.o., Zalaegerszeg, Csány László Közgazdasági Szki, tanára: Kocsisné Molnár Margit;
8. **Patócs Zoltán**, IV.o., Pécs, Zipernowsky Károly Ipari Szki, tanára: Németh József;
9. **Horváth Gabriella**, IV.o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola, tanára: Benedek Ilona;

10. **Gál Marcell**, III.o., Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimnázium, tanára: Csapó Judit. Miniszteri dicséretben részesültek:

11. **Birszki Bálint**, IV.o., Vác, Boronkay György Műszaki Középiskola; 12. **Ádámku Miklós**, IV.o., Budapest, Vársárhelyi Pál Kereskedelmi Szki; 13. **Földi Zoltán**, IV.o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki; 14. **Tar Zoltán**, IV.o., Debrecen, Gábor Dénes Elektronikai Műszaki Középiskola; 15. **Pletyák Attila**, IV.o., Nyíregyháza, Széchenyi István Közgazdasági Szki; 16. **Kovács Krisztián**, III.o., Békéscsaba, Kemény Gábor Műszaki Szki; 17. **Puskás József**, IV.o., Debrecen, Gábor Dénes Elektronikai Műszaki Középiskola; 18. **Eisenberger Aranka**, IV.o., Paks, Energetikai Szakképzési Intézet; 19. **Hirdi László**, III.o., Pécs, Radnóti Miklós Közgazdasági Szki; 20. **Zsihovszki Krisztián**, IV.o., Eger, Neumann János Közgazdasági Szki és Gimnázium; 21. **Meidlinger Nikolett**, IV.o., Győr, Baross Gábor Közgazdasági Szki; 22. **Palócz Béla**, IV.o., Szeged, Körösy József Közgazdasági és Külkereskedelmi Szki; 23. **Veres Zoltán**, IV.o., Kazincbarcika, Irinyi János Műszaki Szki; 24. **Mészáros Róbert**, IV.o., Kecskemét, Kada Elek Közgazdasági Szki; 25. **Bogos Zsuzsa**, III.o., Szigetszentmiklós, Batthyány Kázmér Gimnázium és Szki; 26. **Bitera Krisztián**, IV.o., Győr, Jedlik Ányos Gépipari Szki; 27. **Benkő Tibor**, IV.o., Budapest, Egressy Gábor Ipari Szki; 28. **Mikáczó Zolt**, IV.o., Budapest, Újpesti Műszaki Szki; 29. **Pelhős Bálint**, IV.o., Nagykanizsa, Cserhádi Sándor Mezőgazdasági és Gépészeti Szki; 30. **Hartai Zoltán**, III.o., Kazincbarcika, Irinyi János Műszaki Szki.

Megyei dicséretben részesült 26 tanuló.

II. kategória (Nem speciális tantervű gimnáziumok tanulói)

1. **Prohászka Zoltán**, IV.o., Budapest, Veres Pálné Gimn., tanára: Erdőssy Jenőné;
2. **Döbrente Gábor**, IV.o., Budapest, Városmajori Gimn., tanára: Hadas Ildikó;
3. **Izsák Ferenc**, III.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimn., tanárai: Rozmán Gyula, Peresztegi László;
4. **Környei László**, IV.o., Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn., tanára: Csonka László;
5. **Visy Balázs**, IV.o., Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanára: Hámosi Veronika;
6. **Bettesch Gábor**, IV.o., Paks, Vak Bottyán Gimn., tanára: Dr. Müller János;
7. **Bajcsi István**, IV.o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn., tanára: Katz Sándor;
8. **Király Tamás**, IV.o., Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn., tanára: Bíró Józsefné;
9. **Surányi Gábor**, III.o., Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., tanára: Nizsalovszky Ferenc;
10. **Borbás Gergely**, III.o., Miskolc, Herman Ottó Gimn., tanára: Demény Magdolna.

Miniszteri dicséretben részesültek:

11. **Molnár Gábor**, IV.o., Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Isk.; 12. **Szávai Gergely**, III.o., Szolnok, Veresegyházi Ferenc Gimnázium; 13. **Beer Gábor László**, IV.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimn.; 14. **Kovács Szabolcs**, IV.o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.; 15. **Halbritter András**, IV.o., Győr, Czuczor Gergely Bencés Gimn.; 16. **Maróti Gábor**, IV.o., Szombathely, Nagy Lajos Gimn.; 17. **Kasza Tamás**, IV.o., Kecskemét, Katona József Gimn.; 18. **Kovács Gábor**, III.o., Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Isk.; 19. **Heim László**, III.o., Budapest, Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola; 20. **Mécs Ildikó**, IV.o., Budapest, Eötvös József Gimn.; 21–30. **Bencsáth Boldizsár**, III.o., Budapest, Budai Nagy Antal Gimn.; **Égi József**, IV.o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.; **Farkas Bálint**, IV.o., Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Isk.; **Hegedüs Viktor**, III.o., Paks, Vak Bottyán Gimn.; **Hussami Péter**, III.o., Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Isk.; **Lovassy Árpád**, IV.o., Tata, Eötvös József Gimnázium; **Insperger Tamás**, IV.o., Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Gimn.; **Mátrabérci Dávid**, IV.o., Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.; **Somlóai Dániel**, III.o., Budapest, Városmajori Gimn.; **Szalmás Lajos**, III.o., Hatvan, Bajza József Gimnázium.

Megyei dicséretben részesült 19 tanuló.

III. kategória (A gimnáziumok speciális matematika tantervű osztályainak tanulói)

1. **Koblinger Egmont**, III.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné; és **Szeidl Ádám**, IV.o., Miskolc, Földes Ferenc Gimn., tanárai: Vass István, Veres Pál, Szabó Kálmán;
3. **Szádeczky-Kardoss Szabolcs**, III.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Táborné Vincze Márta, Thiry Imréné; ;
4. **Csörnyei Marianna**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Fazakas Tünde, Montágh Balázs, Babai László;
5. **Madarassy Pál**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Thiry Imréné, Vincze Márta, Horváth Gábor;
6. **Vácsi Péter**, III.o., Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., tanárai: Mike János, Vincze István, Kosztolányi József;
7. **Takács Orsolya**, IV.o., Budapest, Szent István Gimn., tanára: Juhász István;
8. **Párniczky Benedek**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Montágh Balázs, Fazakas Tünde;
9. **Kárpáti Attila**, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., tanárai: Thiry Imréné, Vincze Márta;
10. **Szél Róbert**, IV.o., Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., tanárai: Kosztolányi József, Vincze István.

Miniszteri dicséretben részesültek:

11. *Marx Dániel*, III.o., Budapest, Szent István Gimn.; 12. *Hegedűs Gál*, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.; 13. *Jurek Zoltán*, IV.o., Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.; 14. *Juhász Sándor*, III.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.; 15. *Szeredi Tibor*, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.; 16. *Németh Ákos*, IV.o., Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.; 17. *György András*, IV.o., Budapest, Árpád Gimn.; 18. *Szörényi Balázs*, IV.o., Szeged, Radnóti M. Kísérlet Gimn.; 19. *Kotosz Balázs*, IV.o., Szeged, Radnóti M. Kísérlet Gimn.; 20. *Függ Róbert*, IV.o., Szeged, Radnóti M. Kísérlet Gimn.; 21. *Néz Péter*, IV.o., Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Kísérlet Gimn.; 22. *Nagy Katalin*, III.o., Veszprém, Lovassy László Gimn.; 23. *Bakcsi Gergely*, IV.o., Budapest, Árpád Gimn.; Megyei dicséretben részesült 24 tanuló.

