

A klasszikus Pitagorasz-tétel állítása — a derékszögű háromszög befogóinak hossz négyzet-összege egyenlő az átfogó hossz négyzetével — úgy is fogalmazható, hogy a síkvektorokon értelmezett hossz négyzet függvény az egymásra merőleges vektorok összegéhez a tagokon felvett értékek összegét rendeli, vagyis a merőleges vektorpárokra összegtartó. Ez azt jelenti, hogy az  $E$  síkon (kétdimenziós euklideszi téren) értelmezett  $f : E \mapsto \mathbf{R}$ , ( $\mathbf{R}$  a valós számok halmaza)  $f(x) = |x|^2$  függvényre

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in E, \quad x \perp y$$

teljesül. Ha most ebben az egyenletben a függvényt tekintjük ismeretlennek, akkor azt kérdezhetjük, milyen más  $f : E \mapsto \mathbf{R}$  valós függvényre teljesül még a Pitagorasz-tétel állítása a hossz négyzeten kívül? Amennyiben kiderülni, hogy lényegében nincs egyéb ilyen függvény, az a Pitagorasz-tétel egy sajátos megfordítását jelentené.

Az efféle egyenleteket, amelyekben számok vagy vektorok helyett éppenséggel a bennük előforduló függvények az ismeretlenek, *függvényegyenleteknek* szokás nevezni. Egyenletünk abból a szempontból is sajátos, hogy a változók nem minden lehetséges értékpárjára teljesül, csupán a merőleges vektorpárokra. Ezért most *feltételes* vagy *korlátozott érvényű* egyenletekről beszélünk.

Próbáljuk először  $f$ -et néhány különösen „jó” merőleges vektorpár segítségével jellemezni. Legyen ezért  $u$  és  $v$  két merőleges egységvektor  $E$ -ben. Ekkor  $u + v \perp u - v$ , és így (1) alapján minden  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  esetén a következőkre jutunk:

$$\begin{aligned} f((\alpha + \beta)u) + f((\alpha - \beta)v) &= f((\alpha + \beta)u + (\alpha - \beta)v) = \\ &= f(\alpha(u + v) + \beta(u - v)) = f(\alpha(u + v)) + f(\beta(u - v)) = \\ &= f(\alpha u + \alpha v) + f(\beta u - \beta v) = f(\alpha u) + f(\alpha v) + f(\beta u) + f(-\beta v). \end{aligned}$$

Tehát az origón áthaladó  $u$ , illetve  $v$  irányvektorú egyenesekre leszűkített (valós változós)  $f_u, f_v : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ , az  $f_u(\lambda) = f(\lambda u)$ ,  $f_v(\mu) = f(\mu v)$  képletekkel értelmezett függvényeink egy minden  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  számpárra teljesülő, vagyis *korlátlan érvényű* egyenletnek tesznek eleget:

$$(2) \quad f_u(\alpha + \beta) + f_v(\alpha - \beta) = f_u(\alpha) + f_u(\beta) + f_v(\alpha) + f_v(-\beta).$$

A megjelenő  $-\beta$  argumentum okán sokkal többet mondhatnánk  $f$ -ről, ha ismernénk a függvény párosságát. Viszont bármely valós függvény felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x).$$

Itt tehát  $g$  páros függvény, vagyis  $g(-x) = g(x)$  minden  $x \in E$ -re,  $h$  pedig páratlan, vagyis  $h(-x) = -h(x)$  minden  $x \in E$ -re. Ugyancsak egyszerű számolás mutatja, hogy mindkettő megoldása a kitűzött (1) egyenletünknek. Így azután  $f$  páratlan része,  $h$  (pontosabban  $h_u$  és  $h_v$ ) szintén teljesíti a (2) egyenletet, azaz minden  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  esetén

$$(3) \quad h_u(\alpha + \beta) + h_v(\alpha - \beta) = h_u(\alpha) + h_u(\beta) + h_v(\alpha) + h_v(-\beta).$$

Ezután  $\alpha$  és  $\beta$  szerepét felcserélve:

$$(4) \quad h_u(\beta + \alpha) + h_v(\beta - \alpha) = h_u(\beta) + h_u(\alpha) + h_v(\beta) + h_v(-\alpha).$$

következik, majd ezeket a (3) és (4) egyenlőségeket összeadva és közben kihasználva a  $h_v$  függvény páratlan tulajdonságát, a minden  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  esetén teljesülő

$$2h_u(\alpha + \beta) = 2h_u(\alpha) + 2h_u(\beta)$$

egyenletet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy  $h_u$  összeghez a tagokhoz rendelt értékek összegét rendeli, vagyis *összegetartó*, idegen szóval *additív*. Az additív függvények szintén egy függvényegyenlet megoldásai, mégpedig a nevezetes

$$(5) \quad a(x + y) = a(x) + a(y)$$

*Cauchy-féle egyenleté*. Ezen az alapon az (1) egyenlet megoldásait *merőlegesen additív* függvényeknek mondhatjuk.

Megragadva az alkalmat, tegyünk most egy kis kitérőt, hogy az  $a$  additív függvény néhány alaptulajdonságát számba vegyük — tekintet nélkül arra, hogy az  $E$  síkon, vagy éppen az  $\mathbf{R}$  számegyenesen értelmezett. Nos, ha  $n \in \mathbf{N}$  egy tetszőleges természetes szám, akkor a változó minden rögzített  $x$  értékénél az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}a(2x) &= a(x+x) = a(x) + a(x) = 2a(x), \\a(3x) &= a(2x+x) = a(2x) + a(x) = 2a(x) + a(x) = 3a(x),\end{aligned}$$

és így tovább, egészen az

$$a(nx) = a([n-1]x+x) = a([n-1]x) + a(x) = (n-1)a(x) + a(x) = na(x)$$

egyenlőségig (a pontos bizonyítás teljes indukcióval történhet). Így azután bármely  $m \in \mathbf{N}$ -re

$$a(x) = a\left(m \frac{x}{m}\right) = m \cdot a\left(\frac{x}{m}\right)$$

következik, és ezért

$$a\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}a(x).$$

Ez azt jelenti, hogy minden pozitív  $q = n/m$  racionális szám esetén

$$a(qx) = a\left(n \frac{x}{m}\right) = n \cdot a\left(\frac{x}{m}\right) = n \frac{1}{m}a(x) = qa(x)$$

teljesül. Mivel az  $a(0) = a(0+0) = a(0) + a(0)$  összefüggésből  $a(0) = 0$  következik, és  $0 = a(0) = a(x-x) = a(x) + a(-x)$  szerint  $a$  páratlan függvény, a negatív racionális számokra is teljesül a fenti összefüggés:

$$a([-q]x) = a(-qx) = -a(qx) = -[q \cdot a(x)] = [-q]a(x).$$

Az additív függvényekre való rövid kitekintés után térjünk vissza a  $h$  függvényhez,  $f$  páratlan részéhez. Az  $u$  és  $v$  vektorok szerepének felcserélésével nyilván  $h_v$  additivitását is beláthatjuk, így azután tetszőleges  $x, y \in E$  esetén az  $x = \xi_1 u + \xi_2 v$ ,  $y = \eta_1 u + \eta_2 v$  előállítások és  $h$  merőleges additivitásának segítségével számolhatunk tovább:

$$\begin{aligned}h(x+y) &= h([\xi_1 u + \xi_2 v] + [\eta_1 u + \eta_2 v]) = h([\xi_1 + \eta_1]u + [\xi_2 + \eta_2]v) = \\&= h([\xi_1 + \eta_1]u) + h([\xi_2 + \eta_2]v) = h_u(\xi_1 + \eta_1) + h_v(\xi_2 + \eta_2) = \\&= h_u(\xi_1) + h_u(\eta_1) + h_v(\xi_2) + h_v(\eta_2) = h(\xi_1 u) + h(\xi_2 v) + h(\eta_1 u) + h(\eta_2 v) = \\&= h(\xi_1 u + \xi_2 v) + h(\eta_1 u + \eta_2 v) = h(x) + h(y).\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az  $f$  páratlan része mindig additív függvény, feltétel nélkül.

Lássuk most a  $g$  páros rész függvényt, amelyre szintén teljesül a korlátlan érvényű (2) egyenlet. Helyettesítsünk tehát a  $g$ -re felírt (2) egyenletbe  $\alpha = \beta = \lambda t$ , illetve  $\alpha = -\beta = \lambda t$ . Ekkor

$$g_u(2\lambda) + g_v(0) = 2g_u(\lambda) + 2g_v(\lambda),$$

illetve

$$g_u(0) + g_v(2\lambda) = 2g_u(\lambda) + 2g_v(\lambda),$$

amiből  $g_u(2\lambda) = g_v(2\lambda)$  következik minden  $\lambda \in \mathbf{R}$  esetén. Könnyen látható ugyanis, hogy egy merőlegesen additív függvény a nulla helyen eltűnik, ezért  $g_u(0) = g_v(0) = 0$ . Vagyis a  $g_u$  és  $g_v$  függvények azonosak. Ez viszont  $g$  párossága miatt azt jelenti, hogy a (2) egyenlet

$$g_u(\alpha + \beta) + g_v(\alpha - \beta) = 2g_u(\alpha) + 2g_v(\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

alakba írható. Vegyük észre, hogy ugyanez az egyenlőség teljesül a vektorok hosszénegyzetére is, ami nem egyéb, mint a nevezetes paralelogramma egyenlőség:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2, \quad x, y \in E.$$

Ennek szellemében *négyzetes*, vagy idegen szóval *kvadratikuss* függvényről beszélünk, ha megoldása a nevezetes

$$(6) \quad b(x+y) + b(x-y) = 2b(x) + 2b(y)$$

*Jordan-von Neumann-féle függvényegyenletnek.* (Neumann János, 1903–1957, a XX. század egyik legjelentősebb magyar matematikusa, aki tudományos tevékenységét főként az Egyesült Államokban fejtette ki a játékelmélet, algebra, funkcionálanalízis, számítógéptudomány és kvantummechanika területén. Itt a belső szorzat tereket jellemző normanégyszet egyenletét idéztük P. Jordannal közös cikkéből.)

Megállapíthatjuk tehát, hogy függvényünk páros részének leszűkítése az  $u$  irányvektorú egyenesre (pontosabban  $g_u$ ) kvadratikus függvény, és nyilván ugyanez érvényes  $g_v = g_u$ -ra is. Ezért azután ha  $x = \xi_1 + \xi_2 v$  és  $y = \eta_1 u + \eta_2 v$  ismét tetszőleges vektorok az  $E$  síkon, akkor  $g$  merőleges additivitását is felhasználva:

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x-y) &= g((\xi_1 u + \xi_2 v) + (\eta_1 u + \eta_2 v)) + g((\xi_1 u + \xi_2 v) - (\eta_1 u + \eta_2 v)) = \\ &= g((\xi_1 + \eta_1)u + (\xi_2 + \eta_2)v) + g((\xi_1 - \eta_1)u + (\xi_2 - \eta_2)v) = \\ &= g((\xi_1 + \eta_1)u) + g((\xi_2 + \eta_2)v) + g((\xi_1 - \eta_1)u) + g((\xi_2 - \eta_2)v) = \\ &= g_u(\xi_1 + \eta_1) + g_u(\xi_1 - \eta_1) + g_v(\xi_2 + \eta_2) + g_v(\xi_2 - \eta_2) = \\ &= 2g_u(\xi_1) + 2g_u(\eta_1) + 2g_v(\xi_2) + 2g_v(\eta_2) = \\ &= 2(g(\xi_1 u) + g(\xi_2 v)) + 2(g(\eta_1 u) + g(\eta_2 v)) = \\ &= 2g(\xi_1 u + \xi_2 v) + 2g(\eta_1 u + \eta_2 v) = 2g(x) + 2g(y). \end{aligned}$$

Tehát függvényünk páros része feltétel nélkül kvadratikus az  $E$  síkon. Ezzel beláttuk első tételünket:

**1. Tétel.** *Ha  $f : E \mapsto \mathbf{R}$  merőlegesen additív függvény, akkor egy additív és egy kvadratikus függvény összege.*

Érdekes, hogy bármennyire elemi számolással jutottunk is erre a szép eredményre, az csak a legújabb kutatások mellékterméke (lásd [2]). Azt is vegyük észre, hogy számításainkban mindeddig csupán a  $\lambda u \perp \mu v$  és  $\lambda(u+v) \perp \mu(u-v)$  ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ) alakú merőleges vektorpárok játszottak szerepet, vagyis az (1) feltételes egyenletünk érvényét még jelentősen korlátozhatnánk anélkül, hogy igazságát vesztené tételünk.

★

Kitűzött feladatunk azonban még távolról sincs megoldva: az additív függvények ugyan nyilván megoldásai az (1) egyenletnek, a kvadratikusokról azonban nem mondhatjuk el ugyanezt. Tekintsük például a

$$g(\xi_1 u + \xi_2 v) = \xi_1 \xi_2, \quad \xi_1 u + \xi_2 v \in E,$$

függvényt, amely kvadratikus, hiszen  $x = \xi_1 u + \xi_2 v$ ,  $y = \eta_1 u + \eta_2 v \in E$  esetén

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x-y) &= g((\xi_1 + \eta_1)u + (\xi_2 + \eta_2)v) + g((\xi_1 - \eta_1)u + (\xi_2 - \eta_2)v) = \\ &= (\xi_1 + \eta_1)(\xi_2 + \eta_2) + (\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2) = 2\xi_1 \xi_2 + 2\eta_1 \eta_2 = 2g(x) + 2g(y). \end{aligned}$$

Viszont  $g$  az egymásra merőleges  $u$  és  $v$  vektoron nem additív:

$$g(u+v) = 1 \cdot 1 \neq 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = g(u) + g(v).$$

Valójában a páros megoldásokról azt is be lehet látni, hogy értékeik nem magukból a vektoroktól, hanem csak hosszuktól függnak. Ha ugyanis  $x, y \in E$  és  $|x| = |y|$ , akkor  $(x+y)/2 \perp \pm(x-y)/2$ , és így a párosság felhasználásával

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x-y}{2}\right) = \\ &= g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{-x+y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}\right) = g(y). \end{aligned}$$

Persze úgy is felfoghatjuk, hogy  $g$  a vektorok hossz négyzetétől függ csupán, vagyis

$$g(x) = \gamma(|x|^2), \quad x \in E,$$

valamely  $\gamma : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$  függvénnyel. Viszont tetszőleges  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  esetén  $\lambda u \perp \mu u$ , amiből a Pitagorasz-tétel és a  $g$  merőleges additivitása alapján

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda^2 + \mu^2) &= \gamma(|\lambda u|^2 + |\mu v|^2) = \gamma(|\lambda u + \mu v|^2) = g(\lambda u + \mu v) = g(\lambda u) + g(\mu v) = \\ &= \gamma(|\lambda u|^2) + \gamma(|\mu v|^2) = \gamma(\lambda^2) + \gamma(\mu^2) \end{aligned}$$

következik, vagyis  $\gamma$  additív függvény a nemnegatív valós számok  $\mathbf{R}_+$  halmazán. Említést érdemel, hogy az egész számegyenesen additív függvényhez jutunk, ha  $\gamma$ -t páratlan függvényként terjesztjük ki  $\mathbf{R}$ -re. Tehát a hossz négyzet additív függvényeire pontosíthatjuk a páros, merőlegesen additív függvények leírását. Mivel egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az ilyen függvények valóban merőlegesen additívak, a következő jellemzéshez jutottunk:

**2. Tétel.** Az  $f : E \mapsto \mathbf{R}$  függvény pontosan akkor merőlegesen additív, ha

$$f(x) = \gamma(|x|^2) + a(x), \quad x \in E,$$

alakba írható, ahol  $\gamma : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  és  $a : E \mapsto \mathbf{R}$  additív függvények.

Látható, hogy a Pitagorasz-tétel fent említett sajátos megfordításához további feltételekre van szükség. Ilyen lehet a hossz négyzet nemnegativitásából származó

$$f(x) \geq 0, \quad x \in E,$$

természetes feltevés. Ekkor minden rögzített  $x \in E$  esetén tetszőleges  $n$  természetes számra

$$0 \leq f\left(\frac{x}{n}\right) = \gamma\left(\left|\frac{x}{n}\right|^2\right) + a\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\gamma(|x|^2)}{n^2} + \frac{a(x)}{n}$$

és

$$0 \leq f\left(\frac{-x}{n}\right) = \gamma\left(\left|\frac{-x}{n}\right|^2\right) + a\left(\frac{-x}{n}\right) = \frac{\gamma(|x|^2)}{n^2} + \frac{-a(x)}{n}$$

teljesül, amiből

$$-\frac{\gamma(|x|^2)}{n} \leq a(x) \leq \frac{\gamma(|x|^2)}{n},$$

azaz  $|a(x)| \leq \gamma(|x|^2)/n$  következik. Mivel itt  $n$  bármilyen nagyra választható,  $a(x) = 0$  az egyetlen lehetőség, vagyis a megoldás páratlan része eltűnik.

Térjünk most rá a páros rész vizsgálatára. Mivel  $f(x) = \gamma(|x|^2)$  nemnegatív, azért  $\gamma(\lambda) \geq 0$  minden  $\lambda \geq 0$  esetén. Ha  $\gamma$  nem azonosan nulla, akkor van olyan  $\lambda_0 > 0$  szám, hogy  $\gamma(\lambda_0) > 0$ . Ezután megmutatjuk, hogy

$$(7) \quad \gamma(\varrho\lambda_0) = \varrho \cdot \gamma(\lambda_0), \quad \varrho \in \mathbf{R}.$$

Tegyük fel ennek ellenkezőjét, vagyis hogy valamely  $\varrho$  valós szám esetén  $\gamma(\varrho\lambda_0) = \sigma \cdot \gamma(\lambda_0)$ ,  $\sigma \neq \varrho$ . Ekkor  $\varrho$  és  $\sigma$  között választhatunk egy  $q$  racionális számot, hiszen bármely két különböző valós szám között van racionális. Így azután  $\gamma$  additivitását figyelembe véve

$$\sigma \cdot \gamma(\lambda_0) = \gamma(\varrho\lambda_0) = \gamma(q\lambda_0 + [\varrho - q]\lambda_0) = \gamma(q\lambda_0) + \gamma([\varrho - q]\lambda_0),$$

vagyis a  $\delta = \varrho - q$  jelöléssel

$$\gamma(\delta\lambda_0) = \sigma \cdot \gamma(\lambda_0) - q \cdot \gamma(\lambda_0) = (\sigma - q) \cdot \gamma(\lambda_0).$$

Ha most  $\sigma < q < \varrho$ , akkor  $\delta\lambda_0 > 0$ -ra  $\gamma(\delta\lambda_0) < 0$ , ha pedig  $\varrho < q < \sigma$ , akkor  $-\delta\lambda_0 > 0$ -ra  $\gamma(-\delta\lambda_0) < 0$ , vagyis mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, igazolva ezzel a (7) összefüggést, amit most már a  $\lambda_0 = 1$  választással átírhatunk a

$$\gamma(\lambda) = \lambda \cdot \gamma(1), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

alakba, hiszen  $\gamma(1) = \gamma((1/\lambda_0)\lambda_0) = (1/\lambda_0)\gamma(\lambda_0)$  szintén pozitív. Tehát a nemnegatív megoldások a hossz négyzet nemnegatív skalárszorsai:

$$f(x) = \gamma(|x|^2) = \gamma(1) \cdot |x|^2, \quad x \in E.$$

(Ez nyilván akkor is érvényes, ha a  $\gamma$  függvény azonosan nulla.) Ezzel a Pitagorasz-tétel alábbi megfordítását bizonyítottuk:

**3. Tétel.** A hossz négyzet az egyetlen olyan nemnegatív, merőlegesen additív függvény, amelynek értéke valamely egységvektoron éppen 1.

Érdekesség, hogy Pitagorasz munkásságát követően közel 2500 évnek kellett elteltie, mígnem valakinek eszébe jutott egy ilyen megfordítás lehetősége (lásd Gudder–Strawther [1]).

Befejezésül térjünk vissza kiinduló számításainkhoz és tegyük fel, hogy az  $E$  síkon önkényesen jelöltük ki a „merőlegesnek” tekintett vektorpárokat azzal a megkötéssel, hogy ha  $(x, y)$  a kijelöltek között van, akkor minden  $(\lambda x, \mu y)$  vektorpár is ki van jelölve  $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ . Ekkor azt mondjuk, hogy egy *homogén merőlegességi relációt* értelmeztünk az  $E$  síkon. Jelöljük ezt  $\vdash$ -vel, megkülönböztetve a szokásos merőlegességtől. Számításainkból kitűnik, hogy ha van két olyan  $u$  és  $v$  vektorunk, amelyekre  $u \vdash v$  és  $u + v \vdash u - v$ , vagyis  $(u, v)$  és  $(u + v, u - v)$  kijelölt vektorpárok, akkor a páratlan, „merőlegesen” additív függvények éppen a feltétel nélkül additívak, míg a páros  $g$  megoldások a kvadratikus  $b = g_u : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  függvények.

$$(8) \quad g(x) = g(\xi_1 u + \xi_2 v) = b(\xi_1) + b(\xi_2), \quad x = \xi_1 u + \xi_2 v \in E,$$

alakba írhatók. Ha a  $(\lambda u, \mu v)$  és  $(\lambda[u + v], \mu[u - v])$  jelentik az összes kijelölt „merőleges” vektorpárt  $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ , akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a (9) alakú függvények mindegyike páros és „merőlegesen” additív, vagyis az adja az általános páros megoldást.

Amennyiben elkezdjük bővíteni a „merőleges” vektorpárok körét a homogén tulajdonság megőrzésével, akkor a páros megoldások halmaza szűkül, hiszen egyre több feltételt kell teljesítenie minden megoldásnak. Minden esetre a

$$g(x) = g(\xi_1 u + \xi_2 v) = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad x = \xi_1 u + \xi_2 v \in E,$$

függvény valódi páros megoldás marad mindaddig, amíg csakis a

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 = 0$$

feltételt teljesítő  $(x, y) = (\xi_1 u + \xi_2 v, \eta_1 u + \eta_2 v)$  vektorpárokat vesszük be a „merőlegesek” közé.

Mihelyt azonban ezektől eltérő vektorpárt is kijelölünk „merőlegesnek”, máris eltűnik minden páros, a  $[0, u]$  szakaszon korlátos, „merőlegesen” additív függvény.

#### Irodalom

- [1] Gudder, S. — Strawther, D., *A converse of Pythagoras' Theorem*, Amer. Math. Monthly **84** (1977), 551–553.
- [2] Rázt, J. — Szabó, Gy., *On orthogonally additive mappings, IV*, Aequationes Mathematicae **38** (1989), 73–85.

**Szabó György**

Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem