

Ismert feladat a következő¹:

Jelöljük a $p(x)$ polinom abszolút értékének maximumát a $[-1; +1]$ zárt intervallumon M_p -vel. Melyik $p(x) = x^2 + ax + b$ alakú másodfokú polinomra lesz M_p minimális?

Sokféleképpen el lehet indulni a megoldással. Szemléletesen arról van szó, hogy az $x \mapsto p(x)$ függvény grafikonja felfelé álló parabola, amelynek pl. $a > 0$ esetén a negatív félegyenesen van a csúcsa, s így a $[0; 1]$ intervallumon biztosan monoton nő. Növekedése $p(1) - p(0) = 1 + a$ nagyobb 1-nél, s ez csak úgy lehet, ha vagy $p(1)$, vagy $p(0)$ abszolút értéke nagyobb $1/2$ -nél. Az $a < 0$ eset teljesen szimmetrikus: az y -tengelyre kell tükrözni. Ha végül $a = 0$, akkor $p(x) = x^2 + b$ alakú, az ilyen egyenletű parabola a $[-1; 0]$ intervallumban csökken, a $[0; 1]$ intervallumban nő, tehát M_p a $|p(-1)|$, $|p(0)|$ és $|p(1)|$ értékek közül a legnagyobb. $b = -1/2$ esetén mindhárom abszolút érték $1/2$, tehát $M_p = 1/2$. A b bármely más értéke mellett a három abszolút érték közül legalább egy nagyobb $1/2$ -nél, tehát $M_p > 1/2$. A következő állítást kaptuk:

1. Bármely $p(x) = x^2 + ax + b$ alakú másodfokú polinomra $M_p \geq \frac{1}{2}$. Egyenlőség csak a $p(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ polinomra van.

Az $a > 0$ és $a < 0$ eset szétválasztását megtakaríthattuk volna a következő — inkább algebrai — ötlettel:

2. Ha $p(x)$ 1 főegyütthatójú², és fokszáma páros, akkor a

$$(1) \quad q(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2}$$

polinom foka azonos p fokával, főegyütthatója 1, és q -ban csak páros tagok szerepelnek nullától különböző együtthatóval. Ha p fokszáma páratlan, akkor az

$$(2) \quad r(x) = \frac{p(x) - p(-x)}{2}$$

polinom fokszáma azonos p fokával, főegyütthatója 1, r -ben csak páratlan fokú tagok szerepelnek nullától különböző együtthatóval. Fennáll továbbá az $M_p \geq M_q$ és az $M_p \geq M_r$ egyenlőtlenség.

Az együtthatókra vonatkozó állítások nyilvánvalóak. Az egyenlőtlenségek pedig az összeg és különbség abszolút értékére vonatkozó egyenlőtlenségekből következnek:

$$|p(x) \pm p(-x)| \leq |p(x)| + |p(-x)| \leq 2M_p.$$

Ha $p(x) = x^2 + ax + b$, akkor $q(x) = x^2 + b$, így a most bizonyítottak szerint elég $p(x) = x^2 + b$ alakú polinomok között keresni M_p minimumát. Ha $p(x)$ ilyen alakú, akkor minimuma $p(0) = b$, maximuma a $[-1; 1]$ intervallumban $p(1) = p(-1) = 1 + b$, így $M_p \geq |b|$ és $M_p \geq |1 + b|$. Ha $b \neq -1/2$, akkor $|b|$ és $|1 + b|$ közül legalább az egyik nagyobb $1/2$ -nél, tehát M_p is, $b = 1/2$ esetén $M_p = 1/2$. Ezzel újabb, de ez alkalommal csak *majdnem* teljes bizonyítást adtunk az **1.** állításra. (Érdemes meggondolni, hol hiányos ez a bizonyítás, és hogyan lehet a hiányt pótolni. A kérdésre később még visszatérünk.)

Az első bizonyításban szükségünk volt polinomok abszolút értékeinek maximumára más intervallumokban is, s erre a továbbiakban is szükségünk lesz. Ezért bevezetjük a következő jelölést: $M_p[a, b]$ jelöli a p polinom abszolút értékének az $[a, b]$ intervallumon felvett maximumát. (Mivel a polinomfüggvények az egész számegyenesen folytonosak, ez a maximum létezik.) $M_p[-1; 1]$ nyilván M_p -vel egyenlő.

Az eredeti feladat általánosan is megfogalmazható:

Az 1 főegyütthatójú n -edfokú $p(x)$ polinomok közül melyikre minimális $M_p[a, b]$?

Vagyis: melyik n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomnak legkisebb a legnagyobb eltérése az azonosan 0 függvénytől az $[a, b]$ intervallumban, tehát melyik fér bele a legkisebb, az x -tengelyre szimmetrikus sávba?

A kérdés önmagában is érdekes, és fontos szerepe van a matematika több ágában is. A következőkben erre fogunk választ adni. Mindenekelőtt négy megjegyzést fűzünk hozzá:

1) Korántsem magától értetődő, hogy *van* olyan n -edfokú 1 főegyütthatójú polinom, amelyre $M_p[a, b]$ minimális. Eleve csak azt tudjuk biztosan, hogy $M_p[a, b]$ -nek van alsó korlátja, hiszen minden p -re $M_p[a, b] \geq 0$. Van tehát olyan legnagyobb alsó korlát is — jelöljük a továbbiakban $m_n[a, b]$ -vel —, amelyre igaz, hogy ha p 1 főegyütthatójú n -edfokú polinom, akkor $M_p[a, b] \geq m_n[a, b]$. Egyáltalán nem biztos azonban, hogy van olyan polinom is, amelyre $M_p[a, b] = m_n[a, b]$, vagyis nem biztos, hogy ezt a legnagyobb alsó korlátot $M_p[a, b]$ el is éri. $n = 2$ -re mindkét bizonyításból kiderült, hogy — legalábbis a $[-1; 1]$ intervallum esetében — $m_2[-1, 1] = \frac{1}{2}$, és van ilyen polinom: az $x^2 - \frac{1}{2}$ polinom. (Az első bizonyítás következménye az is, hogy több ilyen polinom nincs. A második bizonyításból csak annyi látható, hogy a kapott $x^2 - \frac{1}{2}$ polinom egy, a minimális $m_n = \frac{1}{2}$ értéket szolgáltató polinom, de nem bizonyítottuk,

¹ A hetvenes években a KöMaL-ban is szerepelt, mint olimpiai előkészítő feladat

² Egy polinom főegyütthatójának a legmagasabb fokú tag együtthatóját nevezzük.

hogy több ilyen nincs.) Itt jegyezzük meg azt is, hogy $n = 1$ -re is van ilyen polinom: könnyen ellenőrizhető, hogy $m_1 = 1$, és az x polinom az egyetlen minimális polinom. Itt és a továbbiakban $m_n[-1; 1]$ helyett röviden m_n -et írunk.

2) Megmutatjuk, hogy az általános $[a, b]$ intervallum esete visszavezethető a $[-1, 1]$ intervallumra. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a $p(x)$ polinom értékkészlete az $[a, b]$ intervallumon megegyezik a $t(x) = p(cx + d)$ polinom értékkészletével a $[-1, 1]$ intervallumon, ha $c = \frac{b-a}{2}$, $d = \frac{b+a}{2}$; c és d értékét így választva tehát $M_p[a, b] = M_t$. Ha $p(x)$ n -edfokú és főegyütthatója 1, akkor a $t(x)$ polinom is n -edfokú és főegyütthatója c^n , az $s(x) = \frac{t(x)}{c^n}$ polinom tehát 1 főegyütthatójú n -edfokú polinom, s abszolút értékének maximuma a $[-1, 1]$ intervallumon $\frac{M_t}{c^n} = \frac{M_p[a, b]}{c^n}$. Minden $[a, b]$ -n értelmezett 1 főegyütthatójú n -edfokú polinomhoz hozzárendeltünk tehát egy $[-1, 1]$ -en értelmezett 1 főegyütthatójú n -edfokú s polinomot, amelyre $M_s = \frac{M_p[a, b]}{c^n}$. Ez a hozzárendelés nyilván kölcsönösen egyértelmű (az s polinomból is egyértelműen vissza tudunk következtetni a p polinomra), ezért azt kaptuk, hogy $m_n = \frac{m_n[a, b]}{c^n}$. Ide c értékét beírva a következőt kapjuk:

$$3. m_n = 2^n \frac{m_n[a, b]}{(b-a)^n}.$$

3) A főegyütthatóra tett kikötésre szükség van, ha nem teszünk ilyen kikötést, akkor — minden együtthatót megfelelően kis pozitív számnak választva — az abszolút érték maximuma egy adott intervallumban tetszőlegesen kicsi lehet. Nyilvánvaló, hogy ha pl. kikötjük, hogy a főegyüttható legyen nagyobb vagy egyenlő, mint a , ($a > 0$), akkor elég azokat a polinomokat vizsgálni, ahol a főegyüttható pontosan a . Az ebben az esetben kapott abszolútérték-maximum pedig pontosan $1/a$ -szorosa annak, amit arra az esetre kapunk, amikor a főegyüttható pontosan 1.

4) Előrebocsátunk még egy általános megjegyzést. Szemléletesen is nyilvánvaló, hogy egy magasabb fokú polinom „jobban oda tud simulni” az x -tengelyhez, mint egy alacsonyabb fokú. Vagyis:

4. $m_n \geq m_{n+1}$, tehát az $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ sorozat monoton csökken.

Ez az állítás következik abból, hogy ha p n -edfokú 1 főegyütthatójú polinom, akkor $s(x) = xp(x)$ olyan $(n+1)$ -edfokú 1 főegyütthatójú polinom, amelyre $M_p \geq M_s$. Ez utóbbi egyenlőtlenség pedig következik abból, hogy $|x| \leq 1$ és $|p(x)| \leq M_p$, így $|xp(x)| \leq M_p$.

Mielőtt rátérnénk m_n értékének és (egy) minimális polinomnak a megkeresésére az általános esetben, még megvizsgáljuk az $n = 3$ esetet.

Legyen $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alakú. Olyan p polinomot keresünk tehát az ilyen alakúak közül, amelyre M_p minimális. Ha $p(x)$ minimális, akkor a (2)-ben definiált $r(x)$ polinom is az, hiszen $M_r \leq M_p$ a 2. állítás szerint, s itt p minimalitása miatt csak egyenlőséggel állhat. Ezért elég olyan polinomokat vizsgálnunk, amelyek $p(x) = x^3 + bx$ alakúak. Az ilyen polinomokra $p(x) = -p(-x)$ (vagyis *páratlan* függvények), tehát abszolút értékük maximumát a $[-1, 1]$ intervallum helyett elég az $I = [0, 1]$ intervallumon vizsgálni. Ezen az intervallumon az $x \mapsto p(x) = x^3 + bx$ függvény konvex³, tehát maximumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel. $p(1) = 1 + b$, $p(0) = 0$. Kézenfekvő az intervallum „közepén” is megvizsgálni a függvényt, mert „valahol ott” lesz a minimuma.

Tekintsük tehát a $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{b}{2}$ értéket. Ez az érték $b < -\frac{3}{4}$ esetén kisebb, mint $-\frac{1}{4}$, tehát ez esetben $M_p > \frac{1}{4}$. Ha viszont $b > -\frac{3}{4}$, akkor $p(1) = 1 + b > \frac{1}{4}$, tehát ez esetben is $M_p > \frac{1}{4}$ adódik. Azt kaptuk, hogy a $b = -\frac{3}{4}$ eset kivételével $M_p > \frac{1}{4}$. Marad a $b = -\frac{3}{4}$ eset. Ekkor $p(x) = x^3 - \frac{3x}{4}$ maximuma $p(1) = \frac{1}{4}$, minimuma — mint az pl. deriválással könnyen látható — éppen az $x = \frac{1}{2}$ helyen van, $-\frac{1}{4}$. Ezzel majdnem teljesen — beláttuk a következő állítást:

5. $m_3 = \frac{1}{4}$, és egyenlőség csak a $p(x) = x^3 - \frac{3x}{4}$ polinomra van.

Valójában azt még nem láttuk be, hogy csak a $p(x) = x^3 - \frac{3x}{4}$ polinomra állhat egyenlőség, mindössze azt láttuk be, hogy az $x^3 + bx$ alakú polinomok között nincs más, amelyre egyenlőség áll. A fenti bizonyításban kiderült, hogy érdemes a harmadfokú polinomokat az $x = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ helyen vizsgálni. Ennek alapján egy rövidebb — és immár teljes — bizonyítást adhatunk az 5. állításra:

Legyen $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tetszőleges 1 főegyütthatójú harmadfokú polinom, és tegyük fel, hogy $M_p \leq \frac{1}{4}$. Ekkor

$$|2 + 2b| = |-p(-1) + p(1)| \leq |p(-1) + p(1)| \leq \frac{1}{2},$$

és

³ Mert $x \geq 0$ -ra az $x \mapsto x^3$ függvény konvex, és egy lineáris — tehát konvex — függvényt adunk hozzá.

$$\left| \frac{1}{4} + b \right| = \left| -p\left(-\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \left| p\left(-\frac{1}{2}\right) \right| + \left| p\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$$

tehát

$$|1 + b| \leq \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad \left| \frac{1}{8} + \frac{b}{2} \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Mint az első bizonyításban már láttuk, ez csak $b = -\frac{3}{4}$ esetén teljesül.

Írjuk be a kapott b értéket a polinomba. Ekkor $p(1) = \frac{1}{4} + a + c$, s ennek abszolút értéke csak akkor nem nagyobb $\frac{1}{4}$ -nél, ha $a + c \geq 0$. Azt kapjuk, hogy $a + c = 0$, $a = -c$. Most ugyanezt végigcsinálva, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{a}{4} + c$ és $p\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{a}{4} + c$, mindkettő abszolút értéke csak akkor nem lesz nagyobb $\frac{1}{4}$ -nél, ha $\frac{a}{4} = -c$. Mindkét feltétel a -ra és c -re pedig csak úgy teljesülhet, ha $a = c = 0$. Ezzel az **5.** állítást teljesen beláttuk.

Most megmutatjuk, hogy az $n = 2$ esetből hogyan következik az $n = 4$ eset. A bizonyítás eleje hasonló az $n = 3$ esetéhez. Legyen $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Azt a p polinomot keressük az ilyen alakúak között, amely abszolút értékének maximuma a legkisebb. Ha p ilyen minimális polinom, akkor a **2.** állítás szerint az (1)-ben definiált $q(x) = x^4 + bx^2 + d$ polinom is az. Erre a polinomra viszont igaz, hogy $q(x) = q(-x)$ (a függvény *páros*), tehát az abszolút érték maximumát a $[-1, 1]$ intervallum helyett most is elég az $I = [0, 1]$ intervallumon vizsgálni. Helyettesítsünk most x helyébe $x = \sqrt{\frac{z+1}{2}}$ -t. Így a $P(z) = \frac{(z+1)^2}{4} + b\frac{z+1}{2} + d = \frac{1}{4}(z^2 + 2(1+b)z + 1 + 2b + 4d)$ másodfokú polinomot kapjuk. Ha z a $[-1, 1]$ intervallumon fut végig, akkor x éppen az I intervallumon fut végig. Másrészt a $4P(z)$ polinom 1 főegyütthatójú másodfokú polinom, tehát ha z a $[-1, 1]$ intervallumon változik, akkor abszolút értékének maximuma az **1.** állítás szerint legalább $1/2$. Azt kapjuk tehát, hogy van olyan x I -ben, tehát olyan z $[-1, 1]$ -ben, amelyre $p(x) = P(z) \geq \frac{1}{8}$. Ebből következik, hogy $M_p \geq \frac{1}{8}$.

Gondolatmenetünket visszafele követve könnyen konstruálhatunk olyan 1 főegyütthatójú negyedfokú p polinomot, amelyre $M_p = \frac{1}{8}$. Ehhez mindössze annyi kell, hogy $4P(z)$ abszolút értékének a maximuma pontosan $1/2$ legyen, hiszen ekkor $P(z)$, s így $p(x)$ abszolút értékének maximuma is pontosan $\frac{1}{8}$ lesz. Vagyis — az **1.** állítást felhasználva — az kell, hogy $4P(z) = z - \frac{1}{2}$ alakú legyen, vagyis $b = -1$ és $d = \frac{1}{8}$ legyen. A következő állításhoz jutottunk:

6. $m_4 = \frac{1}{8}$, és egyenlőség csak a $p(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$ polinomra van.

Ismét nem bizonyítottuk, hogy más p polinomra nincs egyenlőség, de ennek a bizonyítása megint ugyanúgy megy, mint az $n = 3$ esetben, ezért az olvasóra bízunk.

Nézzük végig, hogy mit ad a fenti okoskodás az általános esetben. Legyen

$$p(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_kx^k + \dots + a_0.$$

Ekkor

$$q(x) = x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_2x^2 + a_0,$$

és $M_q \leq M_p$ a **2.** állítás szerint. Másrészt q páros függvény, tehát $M_q = M_q[0, 1]$. Végül azt is tudjuk, hogy ha x^2 helyébe $\frac{z+1}{2}$ -t írunk, akkor a kapott

$$t(z) = q\left(\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right) = \frac{(z+1)^n}{2^n} + a_{2n-2}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots + a_2\frac{z+1}{2} + a_0$$

n -edfokú $\frac{1}{2^n}$ főegyütthatójú polinom, és ha z végigfutja a $[-1, 1]$ intervallumot, vagyis t értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallumon azonos az eredeti q polinom értékkészletével az I intervallumon. Ebből következik, hogy $M_t = M_q[0, 1] = M_q$. Az 1 főegyütthatójú n -edfokú $2^n t(z)$ polinom abszolút értékének a maximuma a $[-1, 1]$ intervallumon tehát $2^n M_t = 2^n M_q$.

Tekintsük most a $q(x) \leftrightarrow 2^n t(z)$ hozzárendelést. Ez minden $2n$ -edfokú 1 főegyütthatójú q polinomhoz egyértelműen hozzárendel egy n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomot, amely abszolút értékének maximuma a $[-1, 1]$ intervallumon $2^n M_q$. A hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, hiszen a $2^n t(z)$ polinomból a $z = 2x^2 - 1$ helyettesítéssel majd 2^n -nel osztva visszakapjuk az eredeti $q(x)$ polinomot. Ha tehát vesszük az összes $2n$ -edfokú 1 főegyütthatójú $q(x)$ alakú (páros) polinomot, és tekintjük mindegyikre az M_q értékét, akkor ezek legnagyobb alsó korlátja éppen m_{2n} . Másrészt a hozzárendelt $2^n t$ polinomok halmaza éppen az összes n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomok halmaza lesz, s ezeknél az abszolút érték maximumának legnagyobb alsó korlátja éppen m_n . De ezek az abszolút érték maximumok megegyeznek

a q -khoz tartozó abszolút érték maximumok 2^n -szeresével, tehát legnagyobb alsó korlátjuk is megegyezik azok alsó korlátjának, azaz m_{2n} -nek a 2^n -szeresével. Ebből következik, az alábbi állítás:

7. $m_{2n} = \frac{m_n}{2^n}$. Ha van olyan $p(x)$ 1 főegyütthatójú n -edfokú polinom, amelyre $M_p = m_n$, akkor az $s(x) = \frac{p(2x^2 - 1)}{2^n}$ olyan 1 főegyütthatójú $2n$ -edfokú polinom, amelyre $M_s = m_{2n}$.

Megjegyezzük, hogy az általános esetben is bizonyítható, hogy az így kapott $s(x)$ polinom az egyetlen minimális polinom, de bizonyítása technikai jellegű, ezért itt lemondunk róla. A **7.** állításból már minden kettőhatványra (és a kettőhatványok háromszorosára) meg tudjuk mondani m_n pontos értékét:

8. $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, ha n kettőhatvány, vagy annak háromszorosa.

Ha $n = 2, 3$, akkor ezt az állítást már igazoltuk. Ha $n = 2^k$, ill. $n = 3 \cdot 2^k$ -ra már beláttuk az állítást, akkor $n = 2^{k+1}$, ill. $n = 3 \cdot 2^{k+1}$ -re a **7.** állításból már következik. Legyen pl. $n = 2^{k+1}$. Ekkor $m_n = \frac{m_{n/2}}{2^{n/2}}$, s itt az indukciós feltevés szerint $m_{n/2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$. Ezt az m_n -re kapott képletbe beírva azt kapjuk, hogy $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Most rátérünk a főtételünk bizonyítására:

9. Minden n egészre $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vagyis: bármely n -edfokú 1 főegyütthatójú p polinomhoz van olyan x a $[-1, 1]$ intervallumban, amelyre $|p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Van olyan polinom, amelyre ez a becslés nem javítható, amelynek tehát minden 1-nél nem nagyobb abszolút értékű x helyen vett $p(x)$ helyettesítési értéke kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Az általános tétel bizonyítása egy meglepő ötleten múlik. Tekintsünk egy tetszőleges n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomot. Láttuk, hogy az n -edfokú és a $2n$ -edfokú 1 főegyütthatójú polinomok között szoros összefüggés van, vizsgáljuk meg tehát az $s^2(x)$ polinomot. Ennek a polinomnak az értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallumon nyilván 0 és M_s^2 között változik. Célszerű tehát a $p(x) = s^2(x) - \frac{M_s^2}{2}$ polinomra áttérni, hiszen ennek értéke már $\frac{-M_s^2}{2}$ és $\frac{M_s^2}{2}$ között változik, tehát

$$M_p = \frac{M_s^2}{2}.$$

Most készítsük el az (1) képlet alapján p -hez a megfelelő, csak páros kitevőjű tagokat használó q polinomot. Ekkor $M_q \leq M_p$, és mivel q páros függvény, azért a $[0, 1]$ intervallumon és a $[-1, 1]$ intervallumon azonos az értékkészlete. Tehát

$$(3) \quad M_q[0, 1] = M_q \leq M_p = \frac{M_s^2}{2}.$$

A q polinomban írjunk x^2 helyett mindenütt $\frac{z+1}{2}$ -t, így egy n -edfokú $t(z)$ polinomot kapunk, amelynek főegyütthatója $\frac{1}{2^n}$. Ha x végigfut a $[0, 1]$ intervallumon, akkor x^2 is, és $(x \geq 0)$ -ra viszont. Másrészt ha z végigfut a $[-1, 1]$ intervallumon, akkor x^2 a $[0, 1]$ intervallumon fut végig, és viszont. Ezért $M_t = M_q[0, 1]$. Szorozzuk meg a t polinomot 2^n -nel, ekkor főegyütthatója 1 lesz, abszolút érték maximuma pedig 2^n -szeresére nő. A kapott $u(z)$ polinom tehát n -edfokú 1 főegyütthatójú polinom, és igaz rá, hogy $M_u = 2^n M_t$. Összegezve:

$$M_u = 2^n M_q[0, 1] \leq 2^n \frac{M_s^2}{2}, \quad \text{azaz} \quad M_u \leq 2^{n-1} M_s^2.$$

Tegyük fel először, hogy van minimális n -edfokú 1 főegyütthatójú s polinom, vagyis $M_s = m_n$. Ekkor a kapott egyenlőtlenség jobb oldala $2^{n-1} m_n^2$. Másrészt u is n -edfokú 1 főegyütthatójú polinom, így $m_n \leq M_u$. A kapott egyenlőtlenség bal oldalát tehát csökkentjük, ha m_n -et írunk. Ezzel a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$m_n \leq 2^{n-1} m_n^2.$$

Ha most tudnánk, hogy m_n nem nulla, akkor oszthatnánk vele, s éppen a kívánt egyenlőtlenséghez jutnánk. De a **4.** állítás szerint az m_n -ek sorozata monoton csökken, és a **7.** állítás szerint van egy pozitív tagú részsorozata, így minden m_n pozitív, tehát oszthatunk vele.

Ezzel befejeztük a bizonyítást abban az esetben, ha van minimális polinom. De ezt még nem tudjuk.

Nézzük tehát azt az esetet, ha m_n -ről csak azt tudjuk, hogy legnagyobb alsó korlátja az n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomok abszolút értékei maximumának. Minden pozitív a számhoz van tehát olyan s polinom, amelyre $M_s \leq (1+a)m_n$. (Itt ismét használjuk, hogy m_n pozitív.) A fenti $M_u \leq 2^{n-1} M_s^2$ egyenlőtlenséget most is megkaphatjuk, s M_u most is nagyobb vagy egyenlő m_n -nél, de most a jobb oldalról csak annyit tudunk, hogy $\frac{m_n}{2^{n-1}}$ -nel osztva (mert nem nulla) a kívántnál kicsit gyengébb

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq (1+a)^2 m_n$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt az egyenlőtlenséget azonban *minden* pozitív a -ra megkaptuk. Márpedig ha a tart nullához, akkor a bal oldal nem változik, a jobb oldal m_n -hoz tart. Tehát a bal oldal nem nagyobb a jobb határértékénél sem, s így most is megkapjuk a kívánt

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq m_n$$

egyenlőtlenséget.

Hátra van még annak megmutatása, hogy van olyan n -edfokú 1 főegyütthatójú p polinom, amelyre $M_p = \frac{1}{2^{n-1}}$. Hogy melyik ez a p polinom, az végső soron a bizonyításból is kikövetkeztethető lenne (fel lehetne rá írni egy függvényegyenletet), de ez meglehetősen bonyolult és kevésbé szemléletes volna. Ehelyett nézzük meg, milyennek is kell lennie a keresett polinomnak. Kicsit átfogalmazva: olyan polinomot keresünk, amelynek főegyütthatója 2^{n-1} , és a $[-1,1]$ intervallumon az értéke -1 és 1 között változik. Mármost ismeretes a következő tétel:

10. *$\cos n\alpha$ kifejezhető $\cos \alpha$ n -edfokú, egész együtthatós polinomjaként. Ebben a polinomban a főegyüttható 2^{n-1} .*

Így például $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$. A tétel könnyen igazolható teljes indukcióval. A kezdő lépést $n = (1), 2, 3, 4$ -re az imént láttuk. Most feltesszük, hogy $n = k - 1$ -re és $n = k$ -ra igaz az állítás, és bebizonyítható $N = (k + 1)$ -re. Elég annyit meggondolnunk, hogy $\cos(k + 1)\alpha$ felírható $\cos k\alpha$, $\cos(k - 1)\alpha$, és $\cos \alpha$ segítségével:

$$\cos(k + 1)\alpha = 2\cos k\alpha \cos \alpha - \cos(k - 1)\alpha.$$

A jobb oldalon $\cos k\alpha$ felírható $\cos \alpha$ k -adfokú egész együtthatós polinomjaként, így $2\cos k\alpha \cos \alpha$ felírható $\cos \alpha$ $(k + 1)$ -edfokú egész együtthatós polinomjaként. A kivonandó viszont felírható $\cos \alpha$ $(k - 1)$ -edfokú egész együtthatós polinomjaként. A jobb oldal tehát $\cos \alpha$ $(k + 1)$ -edfokú egész együtthatós polinomja, $(k + 1)$ -edfokú tagot csak az első tagból kapunk, így a főegyüttható kétszerese lesz a $\cos k\alpha$ -hoz tartozó polinom főegyütthatójának, tehát $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. Ezzel állításunkat beláttuk.

E tétel szerint van egy olyan

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

egész együtthatós polinom, amely $x = \cos \alpha$ helyettesítéssel éppen $\cos n\alpha$ -t adja. $T_n(\cos \alpha) = \cos n\alpha$. Ezt a T_n polinomot az n -edrendű *Csebisev-polinomnak* nevezzük.

Ha most x a $[-1,1]$ intervallum egy pontja, akkor van olyan α , amelyre $x = \cos \alpha$, s erre az α -ra $T_n(x) = \cos n\alpha$. De ekkor $|T_n(x)| \leq 1$. $T_n(x)$ tehát megfelel a kívánalmainknak: főegyütthatója 2^{n-1} , és abszolút értékeinek maximuma 1 . (Azt már láttuk, hogy kisebb vagy egyenlő mint 1 , másrészt $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos n0 = \cos 0 = 1$.)

Azt kaptuk tehát, hogy ha $p(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$, akkor $M_p = m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vagyis az n -edrendű *Csebisev-polinom* 2^{n-1} -edrészre egy olyan polinom, amelynek a $[-1,1]$ intervallumon felvett abszolút értékeinek maximuma a legkisebb az n -edfokú 1 főegyütthatójú polinomok között. (Belátható, hogy ez az egyetlen.) Ezzel a **9.** állítás bizonyítását befejeztük.

Surányi László