

1. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2 \\ r_1 r_2 &= 0, 5. \end{aligned}$$

A kerületek összege: $k_1 + k_2 = 2(r_1 + r_2)\pi = 4\pi$. A területek összege: $t_1 + t_2 = (r_1^2 + r_2^2)\pi = ((r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2)\pi = 3\pi$.

2. A keresett egyenes átmegy a $KLMN$ téglalap O középpontján. Ez az egyenes a KL , MN oldalakat, valamint az NK oldalegyenest rendre az A , B , C pontokban metszi. Belátható, hogy KLF , CKA , CNB derékszögű háromszögek hasonlóak. Mivel $3 \cdot FL = KL$, azért ha $KA = x$, akkor $KC = 3x$. A téglalap középpontos hasonlósága miatt $AL = BN = 3 - x$. Tudjuk továbbá, hogy $NC = KC - KN = 3x - 2$. De $3 \cdot NB = NC$, ezért $3(3 - x) = 3x - 2$, így $x = 11/6$, $AL = 7/6$, (ha $KL = 3$ egység).

A keresett arány: $KA : AL = MB : BN = 11 : 7$.

3. A kifejezés értelmezési tartománya: $x \geq -2$, de $x \neq 1, x \neq 3, x \neq 5$. Szorozzuk meg mind a két oldalt a biztosan pozitív

$$\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+3}+2} : \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+13}+4}$$

kifejezéssel, és alkalmazzuk az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot:

$$\frac{x+2-1}{x+3-4} : \frac{x+4-9}{x+13-16} \geq 0,$$

összevonás és rendezés után:

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} \geq 0.$$

A négy elsőfokú tényező előjelének változásait és az értelmezési tartományt figyelembe véve a megoldás:

$$-2 \leq x \leq -1; \quad 1 < x < 3; \quad 5 < x.$$

4. Tekintsük azt a három kúpot, amelyeknek a csúcsa megegyezik az eredeti kúp csúcsaival, alaplapja a két vágásfelületen, valamint az eredeti alaplapon van. Ezek térfogatainak aránya: $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 3 : 6$. Mivel ezek a kúpok hasonlóak, és tudjuk, hogy a térfogatok a hasonlóság arányának köbével arányosak, azért a kúpok magasságaink aránya: $m_1 : m_2 : m_3 = \sqrt[3]{1/6} : \sqrt[3]{1/2} : 1$.

A feladatban keresett arány:

$$m_1 : (m_2 - m_1) : (m_3 - m_2) = \sqrt[3]{1/6} : \left(\sqrt[3]{1/2} - \sqrt[3]{1/6} \right) : \left(1 - \sqrt[3]{1/2} \right) = 0,55 : 0,243 : 0,206.$$

5. Könnyen számolható, hogy P pontja az e szimmetriatengelynek. Írjuk fel a QP Thálesz-körének, K -nak az egyenletét.

$$x^2 + (y - 1,5)^2 = 10,25.$$

Kiszámítjuk K és e közös pontjainak koordinátáit. Az e egyenletéből $x = 2y - 6$, ezt beírjuk K -ba, másodfokú egyenlethez jutunk, amiből $y_1 = 4, y_2 = 1,4$. A két közös pont $P(2; 4); T(-3, 2; 1, 4)$, ahol T a QR alap felezője. A PQT derékszögű háromszög befogóinak hossza: $TQ = \sqrt{7,2}, TP = \sqrt{33,8}$. Így a PQR háromszög területe $TQ \cdot TP = 15,6$. De $QP = \sqrt{41}$, a keresett magasság legyen m , ekkor a terület: $QP \cdot m/2$. A területre kapott eredmény összevetéséből $m = 31,2/\sqrt{41} \approx 4,87$.

6. A rövidebb alap és a két szár legyen b , a magasság m , a hosszabb alap pedig $a = b + 2x$. Felírjuk a terület négyzetét: $t^2 = m^2(b+x)^2$, de a Pitagorasz-tétel alapján $m^2 = b^2 - x^2$. Ezek alapján $3 \cdot t^2 = (3b - 3x)(b+x)^3$. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést:

$$(3b - 3x)(b+x)^3 \leq \left[\frac{(3b - 3x) + 3(b+x)}{4} \right]^4.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a tagok egyenlők: $3b - 3x = b + x$, amiből $x = b/2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy az alap és a szár hajlásszöge 60° .

7. A harmadik egyenletből: $b = 17 - ac$.

Ezt beírjuk a másik két egyenletbe:

$$a(17 - ac) + c = 11$$

$$c(17 - ac) + a = 13.$$

Vonjuk ki a másodikkól az első: $(c - a)(16 - ac) = 2$. Mivel egész számokon kell megoldani, négy eset van:

$$c - a = -2; \quad -1; \quad 1; \quad 2$$

$$16 - ac = -1; \quad -2; \quad 2; \quad 1$$

$$\text{vagyis} \quad ac = 17; \quad 18; \quad 14; \quad 15.$$

Az ac és $c - a$ ismeretében a és c kiszámolható. Csak a negyedik esetben kapunk egész értéket: $a = 3$, $c = 5$,
 $b = 17 - ac = 2$.

8. Legyen

$$\sin^2 x = 0,5 + y,$$

$$\cos^2 x = 0,5 - y.$$

Ekkor $\sin^8 x + \cos^8 x = (0,5 + y)^4 + (0,5 - y)^4 = 0,125 + 3y^2 + 2y^4 \geq 0,125$, mert $3y^2 + 2y^4 \geq 0$. Tehát a legkisebb érték ($y = 0$ mellett): $1/8$.

Számadó László, Budapest