1. Az egyenletnek $x=3, x=-3$ és $x=0$ kivételével minden valós számra van értelme. Az egyenlet mindkét oldalát $x(x-3)(x+3)$-mal szorozva, majd rendezve $x^2-8x+15=0$ egyenlethez jutunk. Az adott egyenlet egyetlen megoldása $x=5$.

2. Legyen a téglalap rövidebb oldala a, a hosszabb oldala ekkor aq, az átlóinak hossza aq^2 és nyilván $q>1$. A Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$$\left(aq^2\right)^2=(aq)^2+a^2,$$

ahonnan a mértani sorozat hányadosa:

$$q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ha α és β az átlóknak az oldalakkal bezárt szögei, akkor $\operatorname{tg}\alpha=q$ és $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{q}$, $\alpha=51,83^\circ$ és $\beta=38,17^\circ$.

3. a) A négyzetgyök és a logaritmus értelmezése miatt $x>0$. Alakítsuk át az egyenletet, majd vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát:

$$x^{\frac{2\lg x}{4}}=10^2,$$

$$(\lg x)^2=4,\quad \lg x=2,\quad \lg x=-2.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=100$, $x_2=0,01$.

b) Átalakításokkal

$$2^{2x+3}\cdot 5^{2x+3}=2^{x+6}\cdot 5^{3x},$$

$$2^{x-3}=5^{x-3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3}=1. \tag{1}$$

Az egyenlet megoldása: $x=3$.

4. Legyen a számtani sorozat első négy eleme $a-d, a, a+d, a+2d$. A feltételek szerint $4a+2d=20$ és

$$a^2+(a+2d)^2=2\left((a-d)^2+(a+d)^2\right),$$

azaz $2a+d=10$ és $a(a-2d)=0$.

Ha $a=0$, akkor $d=10$, ha $a=2d$, akkor $a=4, d=2$.

A sorozat első négy eleme: -10, 0, 10, 20, vagy 2, 4, 6, 8.

5. A téglalap B csúcsa rajta van az A ponton átmenő, AD-re merőleges egyenesen, mégpedig úgy, hogy $AB=3\cdot AD$. Ezt a követelményt két pont (B_1, B_2) is teljesíti, amelyek koordinátáit helyvektorok alkalmazásával kaphatjuk meg, $B_1(5;9)$, $B_2(-1;-9)$. Az AB_1C_1D téglalap köré írt kör egyenlete $(x-2)^2+(y-5)^2=25$. Ez a kör az x-tengelyt érinti, az y-tengelyből kimetszett szakasz hossza $2\sqrt{21}$ egység. Az AB_2C_2D téglalap köré írt kör egyenlete $(x+1)^2+(y+4)^2=25$. Ez a kör az x-tengelyből 6, az y-tengelyből $4\sqrt{6}$ egység hosszúságú szakaszt metsz ki.

6. Legyen az AC és BD húrok metszéspotnja P és a feltételek miatt $AP=x, PC=8x, DP=2y, PB=3y$. A rövidebb DC ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, $DAC\sphericalangle=DBC\sphericalangle=\alpha$; a rövidebb AB ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, $ADB\sphericalangle=ACB\sphericalangle=\delta$, és $\alpha+\delta=\dfrac{\pi}{2}$.

Az APD és a BPC derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$3x\cdot 8x=3y\cdot 2y,\quad 4x^2=y^2,$$

ezért $y=2x$.

Jelölje O a kör középpontját. A $COD\sphericalangle=2\alpha$, a CD ív hossza 2α, ha az α szöget radiánban mérjük. Mivel $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2y}{3x}=\dfrac{4x}{3x}=\dfrac{4}{3}$, $\alpha=0,9273$, $2\alpha=1,8546$, tehát a CD ív hossza 1,855 egység. $AB=2\delta=\pi-2\alpha=1,287$ egység.

Hasonlóan adódik, hogy

$$AD=0,928 \text{ egység, és } BC=2,214 \text{ egység.}$$

7. Jelölje a téglatest alapéleinek hosszát x és y, az oldalélének hosszát z. A feltételek szerint

$$xy=4\qquad x+y+z=10.$$

A téglatest felszíne

$$A=2(4+(x+y)z)=2(4+(10-z)z)=58-2(z-5)^2,\ \text{ahol } 0<z<10.$$

Látható, hogy $A\leq 58$, és az egyenlőség, a maximális felszínérték (58), akkor adódik, ha $z=5$.

Ekkor $x+y=5$ (és $xy=4$).

A maximális felszínű téglatest élei: 1, 4, 5 egység, a maximális felszín 58 területegység.

8. Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés

$$\frac{2}{(y-2)^2+2}\geq\frac{2}{0+2}=1$$

;

az 1 értéket csak $y=2$ esetén veszi fel.

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik, hogy $a^2+\dfrac{1}{a^2}\geq 2$ és $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ csak akkor 2, ha $a^2=1$.

Ezek szerint

$$\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\geq 2,$$

ahol az egyenlőség $\cos^2(xy)=1$ esetén teljesül.

A megoldandó egyenlet bal oldalán álló kifejezésnek akkor van értelme, ha $\cos^2(xy)\neq 0$. A kettő alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)\geq\log_2 2=1,$$

és az 1 értéket $\cos^2(xy)=1$ esetén veszi fel.

Az egyenletnek tehát azok a valós $(x;y)$ számpárok a megoldásai, amelyekre mindkét oldal helyettesítési értéke 1.

Így $y=2$ és $\cos^2(2x)=1$, azaz

$$\frac{1+\cos 4x}{2}=1,\quad \cos 4x=1,\quad 4x=3k\pi,\quad x=k\cdot\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.$$

Az adott egyenletet az $x=k\cdot\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}), y=2$ számpárok elégítik ki.

Rábai Imre, Budapest