

1. Az első egyenlet $(x - y)^2 = 9$, tehát $x - y = 3$, vagy $x - y = -3$.

Ha $x = y + 3$, akkor ezt a második egyenletbe helyettesítve, $y^2 + 3y + 2 = 0$, így $y_1 = -1$, $x_1 = 2$, vagy $y_2 = -2$, $x_2 = 1$.

Ha $x = y - 3$, akkor $y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_3 = 1$, $x_3 = -2$, vagy $y_4 = 2$, $x_4 = -1$.

Megjegyzés. Adjuk hozzá az első egyenlet (-2) -szeresét a második egyenlethez, ekkor $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$, azaz $x = -2y$ vagy $y = -2x$. Ezekhez társítva az $(x - y)^2 = 9$ egyenletet, szintén megkaphatjuk a megoldásokat.

2. Legyen $T_{ABCN} = t$. A szögfelező osztásarány tétele miatt $T_{ABD} = \frac{3}{7}t$, ugyanezért $T_{AED} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{7}t = \frac{1}{4}t$.

3. A szóban forgó összegek $S_1 = \frac{n(2n-1)}{2}$, illetve $S_2 = \frac{n(4n+2)}{2}$; a feltétel szerint

$$\frac{3n-1}{4n+2} = \frac{5}{7},$$

ahonnan $n = 17$.

4. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$, tehát mindig pozitív értéket vesz fel. Az

$$1 \leq \frac{2x^2 - 6x + 6}{x^2 - 4x + 5} \leq 3$$

tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$(1) \quad x^2 - 4x + 5 \leq 2x^2 - 6x + 6 \quad \text{és} \quad (2) \quad 2x^2 - 6x + 6 \leq 3x^2 - 12x + 15.$$

Az (1) ekvivalens az $(x-1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséggel, a (2) ekvivalens az $(x-3)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséggel, tehát minden valós x -re teljesül az állítás.

5. A nyolcszögnek van két olyan szomszédos oldala, amelyek hossza 1, illetve 3 egység. Legyen $AB = 1$, $BC = 3$ egység, a kör középpontja O . Az $\angle AOC < 90^\circ$. Jelölje r a kör sugarát. Ekkor $AC = r\sqrt{2}$. Most a hosszabb AC ívhez tartozó középponti szög 270° , így az ABC háromszögben $\angle ABC < 135^\circ$. A koszinusztétel alkalmazásával

$$2r^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \text{ahonnan}$$
$$r^2 = 5 + 1,5 \cdot \sqrt{2}, \quad r \approx 2,67 \text{ egység.}$$

6. Ha a keresett kör középpontja a $K(u, v)$, akkor a K pont a három egyenestől egyenlő távolságra van, azaz

$$|u| = |v| = \frac{1}{5}|3u + 4v - 10|.$$

$$\text{Így} \quad u = v \quad \text{és} \quad \frac{1}{5}(3u + 4v - 10) = u,$$

$$\text{vagy} \quad u = v \quad \text{és} \quad \frac{1}{5}(3u + 4v - 10) = -u,$$

$$\text{vagy} \quad -u = v \quad \text{és} \quad \frac{1}{5}(3u + 4v - 10) = u,$$

$$\text{vagy} \quad -u = v \quad \text{és} \quad \frac{1}{5}(3u + 4v - 10) = -u,$$

ahonnan $u_1 = 5$, $v_1 = 5$, $r_1 = 5$, vagy $u_2 = \frac{5}{6}$, $v_2 = \frac{5}{6}$, $r_2 = \frac{5}{6}$, vagy $u_3 = -\frac{5}{3}$, $v_3 = \frac{5}{3}$, $r_3 = \frac{5}{3}$, vagy $u_4 = \frac{5}{2}$, $v_4 = -\frac{5}{2}$, $r_4 = \frac{5}{2}$.

A feltételeknek tehát négy kör felel meg, ezek egyenlete:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36},$$
$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}, \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

7. Ha $m = 0$, akkor nincs megoldás. Ha $m \neq 0$, akkor $12 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + \frac{2m}{3} = 0$. A diszrimináns nem-negatív, azaz $D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{2m}{3} = 16(9 - 2m) \geq 0$, ha $m \leq \frac{9}{2}$.

Mivel $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, azért a

$$0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9-2m} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9-2m} \leq 1$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyiknek teljesülnie kell. Az egyenletnek így akkor van megoldása, ha $0 < m \leq \frac{9}{2}$.
Ha $m = \frac{9}{2}$, akkor $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $x_n = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet gyökei x_1 és x_2 , és $x_2 = 3x_1$, akkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján $4x_1 = -\frac{b}{a}$ és $3x_1^2 = \frac{c}{a}$, ahonnan $3 \cdot \frac{b^2}{16a^2} = \frac{c}{a}$, így $4ac = \frac{3}{4}b^2$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$.

Fordítva, legyen $D = \frac{1}{4}b^2$, ekkor $x_{1,2} = \frac{-b \pm \frac{1}{2}b}{2a}$, $x_1 = -\frac{1}{4}\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{3}{4}\frac{b}{a}$, így valóban $x_2 = 3x_1$.

Rábai Imre