

1. a) A terület nyilván $8 \cdot 4 = 32$ területegység. b) Mivel az $\angle ACB = 90^\circ$, azért AB a trapéz köré írt körének átmérője. Legyen a C pont vetülete az AB oldalon C' , $C'B = x$, $CB = y$. Az ABC derékszögű háromszögben alkalmazhatjuk a magasságtételt és a befogótételt. Ezek szerint $4^2 = 8 \cdot x$, $x = 2$ egység, így $AB = 10$ egység, a köré írt kör sugara 5 egység; $y^2 = 2 \cdot 10$, $y = 2 \cdot \sqrt{5}$ egység.

A trapéz kerülete: $K = 2 \cdot 8 + 2y = 16 + 4 \cdot \sqrt{5}$ egység.

2. Az adott egyenlet diszkriminánsa $D = 4(8k^2 + k + 106)$, mindig pozitív (miért?), így mindig két különböző valós gyöke van. A gyökök pontosan akkor különböző előjelűek, ha szorzatuk negatív, azaz ha $x_1 x_2 = k^2 + 11k - 102 < 0$, ami $-17 < k < 6$ esetén teljesül.

Megjegyzés: Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet esetén $\frac{c}{a} < 0$, akkor $ac < 0$, így a diszkrimináns $D = b^2 - 4ac > 0$; tehát $ac < 0$ esetén mindig két különböző valós gyöke van az egyenletnek.

3. Mivel $\sin \frac{11\pi}{2} = -1$ és $\cos 2x - 2 \cos^2 x = -1$, ezért a $\sin 2x + |\sin x| = 0$ egyenletet kell megoldani a $[0; 2\pi]$ intervallumon.

Ha $0 \leq x \leq \pi$, akkor $|\sin x| = \sin x$, így $(2 \sin x) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0$, $\sin x = 0$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$, tehát $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Ha $\pi < x \leq 2\pi$, akkor $|\sin x| = -\sin x$, így $(2 \sin x) \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0$, $\sin x = 0$ vagy $\cos x = \frac{1}{2}$, tehát $x_4 = \frac{5\pi}{3}$, $x_5 = 2\pi$.

4. Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x + 2 > 0$ és $9 - x^2 > 0$, azaz ha $-2 < x < 3$. Azonos átalakításokkal

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{9-x^2}.$$

Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\sqrt{x+2} > \frac{1}{2} \sqrt{9-x^2}.$$

Mivel mindkét oldalon nemnegatív szám áll, ezért négyzetreemelés, majd rendezés után

$$4x + 8 > 9 - x^2, \quad x^2 + 4x - 1 > 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai tehát

$$\sqrt{5} - 2 < x < 3.$$

5. a) A tört számlálója pozitív állandó, a nevezője is mindig pozitív értéket vesz fel. Így a tört értéke akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb.

Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$. Most $2^{-x} + 2^{x+2} \geq 2\sqrt{2^{-x} \cdot 2^{x+2}} = 4$. Az egyenlőség $2^{-x} = 2^{x+2}$, $-x = x + 2$, $x = -1$ esetén áll fenn.

A tört legnagyobb értéke $\frac{16}{4} = 4$, amit $x = -1$ esetén vesz fel.

b) Ismeretes, hogy $a^2 + b^2 \geq 0$, $a^2 + b^2 + k \geq k$, ha $k \geq 0$, így $-a^2 - b^2 \leq 0$ és $k - a^2 - b^2 \leq k$, ahol az egyenlőségek $a = 0$, $b = 0$ esetén állnak fenn.

Most ha $a = x^2 - 4$, $b = 1 + x - \log_2 y$ és $k = 4$, akkor mivel

$$-x^4 + 8x^2 - 12 - (1 + x - \log_2 y)^2 = 4 - (x^2 - 4)^2 - (1 + x - \log_2 y)^2 \leq 4.$$

A kifejezés legnagyobb értéke 4 , amit akkor vesz fel, ha $x^2 - 4 = 0$ és $1 + x - \log_2 y = 0$, azaz ha $x_1 = 2$, $y_1 = 8$ vagy $x_2 = -2$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

6. Nyilván $\beta \neq 90^\circ$ és $\gamma \neq 90^\circ$.

Az igazolás során a következő ismert azonosságokat alkalmazzuk: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\beta + \gamma)$, $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$.

A feltételi egyenlettel ekvivalensek a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} \sin 2\gamma + \sin 2\beta &= 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ 2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) &= 4 \sin(\beta + \gamma) \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Most $\sin(\beta + \gamma) > 0$, tehát $2 \sin(\beta + \gamma)$ -val lehet osztani.

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma &= 2 \cos \beta \cos \gamma, \quad \text{azaz} \\ \cos(\beta + \gamma) &= 0 \\ \beta + \gamma &= 90^\circ, \quad \text{azaz } \alpha = 90^\circ,\end{aligned}$$

tehát a háromszög valóban derékszögű.

7. Az E érintési pont ordinátája 9, abszcisszája a $3x - 4 \cdot 9 = -45$ egyenletből $x = -3$. A keresett kör(ök) középpontja rajta van az E pontban az adott egyenesre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete $4x + 3y = 15$.

Az adott egyenes az x tengelyt a $G(-15; 0)$ pontban metszi. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $GE = GF_1 = GF_2$, ahol F_1 és F_2 azok a pontok, amelyekben a szóban forgó kör(ök) az x -tengelyt érinti(k). Most $GE = 15$, így $F_1(-30; 0), F_2(0, 0)$. Ha a keresett körök középpontja $(4; 5)$, akkor $4n + 3v = 15$ és $n_1 = -10, n_2 = 0$; tehát $v_1 = 45, r_1 = 45$ és $v_2 = 5, r_2 = 5$. A feltételeknek megfelelő körök egyenlete:

$$(x + 30)^2 + (y - 45)^2 = 45^2,$$

illetve

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

8. Az állítás teljes indukcióval bizonyítható. A megoldás során felhasználjuk az (ugyancsak teljes indukcióval igazolható)

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{és} \\ 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

azonosságokat. Mivel $k(k+1)(2k+1) = 2k^3 + 3k^2 + k$, ezért

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \\ &= (2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1) + (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2) + \dots + (2n^3 + 3n^2 + n) = \\ &= 2(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2).\end{aligned}$$

Rábai Imre