

Elméleti verseny*

1. feladat: Léggöri elektromosság

Elektrosztatikus szempontból a Föld felszínét jó vezetőnek tekinthetjük. A Föld egy bizonyos Q_0 töltéssel rendelkezik, illetve egy σ_0 átlagos felületi töltéssűrűsége van.

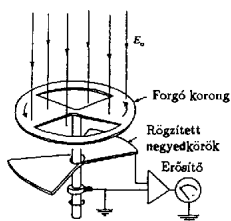
1. Jó idő esetén a lefelé mutató E_0 elektromos térerősség a Föld felszínén hozzávetőlegesen 150 V/m értékű. Határozd meg a Föld felszíni töltéssűrűségének nagyságát, illetve a Föld teljes töltését!

2. A lefelé mutató elektromos tér nagysága a magassággal csökken, és 100 m magasságban körülbelül 100 V/m értékű. Számítsd ki a léggör átlagos eredő töltését köbméterenként a Föld felszíne és a 100 m-es magasság között!

3. Az előző részfeladatban általad kiszámított eredő töltéssűrűség valójában közel azonos számú, egyszeresen töltött pozitív és negatív iontól származik, amelyeknek egységnyi térfogatra eső száma n_+ és n_- . A Föld felszínéhez közel, jó idő esetén: $n_+ \approx n_- \approx 6 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$. Ezek az ionok a függőleges elektromos tér hatására mozgásban vannak. Sebességük arányos a térerősséggel:

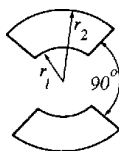
$$v \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot E,$$

ahol a v sebességet m/s-ban, az E térerősséget pedig V/m-ben mérjük. Mennyi idő alatt semlegesítené a léggöri ionok mozgása a Föld felületi töltésének a felét, ha más folyamatok (például villámok) nem pótolnák a töltést?



1. ábra

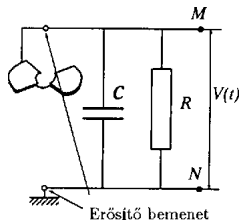
4. A léggöri elektromos tér, s így σ_0 mérésére az egyik lehetőséget az 1. ábrán látható berendezés jelenti. Két negyedkört, amelyek a földtől szigeteltek, de egymással össze vannak kötve, közvetlenül egy egyenletesen forgó, földelt korong alatt rögzítünk. A forgó korongban két negyedkör alakú lyukat vágunk. (Az ábrán a lemezek távolságát a jobb áttekinthetőség kedvéért felnagyítottuk.) Minden körülfordulás alkalmával a szigetelt negyedköröket kétszer éri teljesen az elektromos tér, illetve (negyed periódussal később) kétszer teljesen árnyékolva lesznek a tértől.



2. ábra

Legyen T a körülfordulás periódusideje és legyenek a szigetelt negyedkörök belső és külső sugarai r_1 és r_2 értékűek, amint ezt a 2. ábra mutatja. Legyen $t = 0$ az a pillanat, amikor a szigetelt negyedkörök teljesen árnyékoltak.

Írj fel olyan kifejezéseket, amelyek $t = 0$ és $t = T/2$ között az idő függvényében megadják a szigetelt lemez felső felületén felhalmozódó $q(t)$ töltést. Ábrázold grafikusán is a töltés időbeli változását! (A léggöri ionok áramát most hanyagold el!)



3. ábra

5. Az előző alkérdésben leírt berendezés egy erősítőhöz kapcsolódik, amelynek bemenő áramköre egy párhuzamosan kapcsolt C kapacitású kondenzátornak és egy R ellenállásnak feleltethető meg (3. ábra). (Feltételezhetjük, hogy a negyedkörökből álló berendezés saját kapacitása elhanyagolható C -hez képest.)

*A rendelkezésre álló idő: 5 óra.

Vázold grafikusán az M és N pontok közötti V feszültséget az idő függvényében a korong egy teljes körülfordulása alatt, közvetlenül azután, hogy a korong T periódusidejű forgásba jött, ha:

- $T = T_a \ll CR$;
- $T = T_b \gg CR$.

(Tételezd fel, hogy C és R rögzített értékek, csak T változik az a) és b) határeseteknek megfelelően!) Adj meg közelítő formulát a V_a/V_b arányszámra, ahol V_a és V_b a $V(t)$ feszültség legnagyobb értékei az a), illetve b) határesetekben!

6. Tegyük fel, hogy $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0,01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ és a korong másodpercenként 50 fordulatot tesz. Közelítőleg határozd meg, hogy mekkora a V feszültség legnagyobb értéke egy fordulat alatt ebben az esetben!

Megoldás. 1. Az elektrosztatikai Gauss-törvény értelmében az R sugarú Föld $4\pi R^2$ felszínére vonatkoztatott teljes elektromos fluxus és a Föld Q össztöltése között a

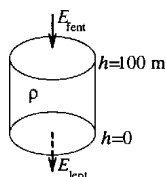
$$-E_0 \cdot 4\pi R^2 = Q/\varepsilon_0$$

összefüggés áll fenn. Innen numerikusan $Q = -6,7 \cdot 10^5 \text{ C}$, a σ a felületi töltéssűrűsége (felületegységre vonatkoztatott töltésre) pedig

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_0 = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

adódik.

2. Képzeljünk el egy A alapterületű, 100 m magas függőleges hengert és alkalmazzuk erre Gauss törvényét (4. ábra):



4. ábra

$$E_{\text{lent}} \cdot A - E_{\text{fent}} \cdot A = Q_{\text{belül}}/\varepsilon_0 = \varrho_{\text{átlag}} \cdot (A \cdot 100 \text{ m})/\varepsilon_0.$$

Innen a keresett térfogati töltéssűrűség numerikusan: $\varrho_{\text{átlag}} = 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^3$.

3. Ha egy vezető térfogategységenként n darab, egyenként q töltésű, töltött részecskét tartalmaz, s ezek v sebességgel mozognak, akkor a felületegységre jutó áram, az úgynevezett áramsűrűség

$$j = n q v.$$

A légkörben egyaránt találunk pozitív és negatív részecskéket (töltésük $\pm e$). A lefelé mutató elektromos mező a negatív töltéseket felfelé, a pozitívakat pedig lefelé mozgatja. A Föld töltésének csökkenését a pozitív töltések árama okozza, ez (SI-mértékegységeket használva)

$$j = n_+ e v = (6 \cdot 10^8) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (1,5 \cdot 10^{-4} E) = 1,44 \cdot 10^{-14} E.$$

Mivel a j áramsűrűség a σ töltéssűrűség ($d\sigma/dt$) változási ütemével, az E térerősség pedig (a lefelé mutató irányt választva pozitívnak) $-\sigma/\varepsilon_0$ -al egyenlő, a fenti egyenlet így is írható:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -1,44 \cdot 10^{-14} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx -\frac{1}{600} \sigma.$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlet éppen olyan, mint a radioaktív bomlást leíró (differenciál-)egyenlet, a megoldása tehát az ismert exponenciális bomlástörvénynek megfelelő

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-t/\tau}, \quad \text{ahol } \tau \approx 600 \text{ s.}$$

Ezek szerint a légköri ionok mozgása a Föld töltésének felét

$$T = \tau \cdot \ln 2 \approx 415 \text{ s} \approx 7 \text{ perc}$$

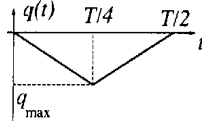
alatt semlegesítené, ha más folyamatok nem játszódna le. (Amennyiben a kezdeti j_0 áramsűrűség időbeli változásától eltekintünk, a „felezési időre” kb. 5 perc adódik. Ez az egyszerűsített számolási mód nyilván csak durva közelítésnek, nagyságrendi becslésnek tekinthető.)

4. Ha $t = 0$ -nak választjuk azt a pillanatot, amikor a forgó korong teljesen leárnyékolja a negyedköröket, a külső elektromos mező pillanatnyi fluxusából számolva a kért töltésre

$$q(t) = -2\pi (r_2^2 - r_1^2) \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{t}{T}, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq T/4,$$

$$q(t) = -\pi (r_2^2 - r_1^2) \varepsilon_0 E_0 \cdot \left(1 - \frac{2t}{T}\right), \quad \text{ha } T/4 \leq t \leq T/2$$

adódik, s hasonló kifejezések érvényesek a további félperiódusokban is (5. ábra).



5. ábra

A lemezekre kerülő legnagyobb (negatív) töltés:

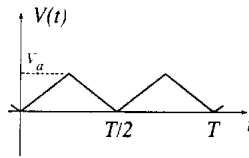
$$q_{\max} = -\frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2) \varepsilon_0 E_0.$$

5. Erre a kérdésre az áramkörü egyenletek részletes megoldása nélkül is választ lehet adni. Mindössze azt kell észrevennünk, hogy a negyedkörök töltésének csökkenési sebessége (vagyis a negyedkörökről elfolyó áram) két tag összege: az egyik a kondenzátor töltésének $C \cdot dV/dt$ változási sebességével, a másik pedig az ellenálláson átfolyó V/R árammal egyenlő. Attól függően, hogy ezen két mennyiség közül melyik hanyagolható el a másik mellett, két jellegzetes határesetet különböztethetünk meg.

a) Ha $CV/T \gg V/R$, azaz $T = T_a \ll CR$, az R ellenálláson nagyon kevés töltés áramlik át egy periódus alatt. Ebben a határesetben az történik, hogy mialatt a negyedkörök a külső elektromos mező fluxusváltozásának megfelelően egyre több negatív töltéssel kell rendelkezzenek, nyilván csaknem ugyanannyi *pozitív* töltés kerül a kondenzátorra (hiszen az ellenálláson átfolyó kevés töltést leszámítva az össztöltés állandó marad). A $V(t)$ feszültség tehát $t = 0$ -tól $t = T/4$ -ig csaknem lineárisan növekszik, majd ugyanennyi ideig lineárisan csökken (6. ábra). A legnagyobb feszültség ebben az esetben

$$V_{\max} = V_a \approx \frac{|q_{\max}|}{C},$$

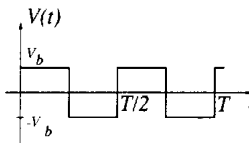
ahol $q_{\max}$ a 4. alpontban megadott kifejezés.



6. ábra

b) A másik határesetben $T = T_b \gg CR$. Ilyenkor a töltések könnyen átjutnak az R ellenálláson, q növekedtekor időben közel állandó pozitív, q csökkenésekor pedig állandó nagyságú negatív áram folyik. Az áramerősség nagysága mindkét esetben $|q_{\max}| (T_b/4)$. Az R ellenálláson mérhető feszültség egy-egy negyed-periódusban közelítőleg állandó, előjele pedig váltakozik (7. ábra). A maximális feszültség:

$$V_{\max} = V_b \approx \frac{4|q_{\max}|R}{T_b}.$$



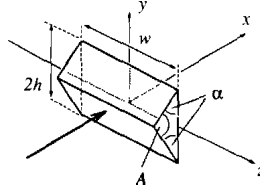
7. ábra

A két határeset megfelelő kifejezéseit összevetve:

$$\frac{V_a}{V_b} \approx \frac{T_b}{4CR}.$$

6. A megadott számértékeknel $RC = 0,2$ s, $T = 0,02$ s, vagyis a $T \ll RC$ határeset valósul meg. Az 5. pont a) esetének megfelelő összefüggéseket alkalmazva végül a $V_{\max} = 1$ mV eredmény adódik.

2. feladat: *Lézerfény erőhatása átlátszó prizma*

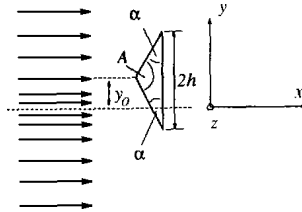


1. ábra

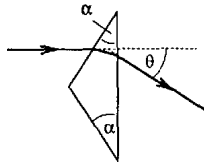
A fénytörés következtében egy erős lézersugár számottevő erőt fejthet ki kicsiny átlátszó testekre. Ennek a jelenségnek a bemutatására tekintsünk egy kicsiny, háromszög alakú üvegprizmát, amelynek csúcsonti szöge $A = \pi - 2\alpha$, alaplapjának hossza $2h$, szélessége pedig w . A prizma törésmutatója n , anyagának sűrűsége ρ .

Tegyük fel, hogy a prizmat egy olyan lézersugárba helyezzük, amely vízszintesen az x irányban halad. (Az egész feladat során feltehetjük, hogy a prizma nem forog, azaz csúcspontja mindvégig a lézersugárral ellentétes irányba mutat, illetve a háromszög alakú oldallapja mindvégig párhuzamos az $x-y$ síkkal, és alaplapja mindvégig párhuzamos az $y-z$ síkkal, amint ezt az 1. ábra mutatja. A környező levegő törésmutatóját vegyük $n_{\text{lev}} = 1$ értékűnek! Tegyük fel továbbá, hogy a prizma oldallapjai visszaverődés elleni bevonattal rendelkeznek, így egyáltalán nem történik visszaverődés.)

A lézersugár intenzitása olyan, hogy a z -tengely mentén (széltében) egyenletes, azonban az y távolsággal lineárisan csökken az x tengelytől úgy, hogy a maximális I_0 értékét $y = 0$ -nál veszi fel, illetve $y = \pm 4h$ esetén csökken nullára (2. ábra). [Az intenzitás az egységnyi felületre eső teljesítményt jelenti, mértékegysége: W/m^2 .]



2. ábra



3. ábra

1. A lézersugár a prizma felső lapjára esik (3. ábra). Az x tengelyhez képest milyen Θ szögben hagyja el az alaplapot ez a sugár? Elegendő, ha megadsz egy olyan egyenletet, amelyben α és n szerepel, és amelyből ki lehet fejezni a Θ szöveget.

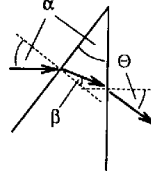
2. Fejezd ki I_0 , Θ , h , w és y_0 segítségével a lézersugár által a prizma ható eredő erő x és y komponensét, ha a prizma csúcsát y_0 távolsággal eltoljuk az x tengelytől, ahol $|y_0| \leq 3h$ (2. ábra). Ábrázold grafikusán az erő vízszintes és függőleges komponensének értékét az y_0 függőleges eltolódás függvényében!

3. Tegyük fel, hogy a lézersugár 1 mm széles a z irányban, és $80 \mu\text{m}$ keskeny az y irányban. A prizma adatai: $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $w = 1 \text{ mm}$, $n = 1,5$ és $\rho = 2,5 \text{ g}/\text{cm}^3$. Hány watt teljesítményű lézer szükséges ahhoz, hogy ezt a prizmat egyensúlyban tartsa az y irányú gravitációs erővel szemben, ha a prizma csúcsa $y_0 = -h/2 (= -5 \mu\text{m})$ távolságra van a lézersugár tengelye alatt?

4. Tegyük fel, hogy ezt a kísérletet gravitációmentes helyen végezzük el ugyanezzel a prizmaival, és a lézernyaláb kiterjedése is ugyanakkora, mint az előző alkérdésben, az intenzitásának értéke azonban $I_0 = 10^8 \text{ W}/\text{m}^2$. Mekkora

periódusidejű rezgéssel mozogva a prizma, ha $y_0 = h/20$ távolságra tennénk a lézersugár közepétől, és ott magára hagynánk a prizmát a gravitációmentes térben?

Megoldás. 1. Ez a részfeladat a fénysugarak törési törvényének (Snellius–Descartes-törvény) és egyszerű geometriai összefüggéseknek a felírásával oldható meg.



4. ábra

Az 4. ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= n \sin \beta, \\ \sin \Theta &= n \sin(\alpha - \beta),\end{aligned}$$

ahonnan

$$\Theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right) \right].$$

2. A prizma ható erő a lézersugár lendületének (impulzusának) időegységre eső megváltozásával egyenlő nagyságú, azzal ellentétes irányú vektor.

Tekintsük először a prizma felső részére eső fénysugarat és határozzuk meg az impulzusának megváltozását! Ha másodpercenként n darab E energiájú (vagyis E/c nagyságú impulzussal rendelkező) foton esik a prizma a negatív x -tengely irányából, s Θ szögben eltérülve hagyják el a prizmát, akkor ezen fotonok impulzusának megváltozása:

$$\Delta \mathbf{p} = (\Delta p_x, \Delta p_y) = \frac{nE}{c} \cdot [(\cos \Theta - 1), -\sin \Theta].$$

Tekintettel arra, hogy az nE mennyiség a fotonok által egységnyi idő alatt szállított energia, vagyis a fénysugár P teljesítménye, az üvegprizma felső felére kifejtett erő:

$$\mathbf{F}_{\text{felül}} = \frac{P_{\text{felül}}}{c} \cdot [(1 - \cos \Theta), \sin \Theta].$$

Hasonló érvelés alapján az alsó prizmaoldalra ható erő:

$$\mathbf{F}_{\text{alul}} = \frac{P_{\text{alul}}}{c} \cdot [(1 - \cos \Theta), -\sin \Theta],$$

a prizma ható teljes erő pedig

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [(P_{\text{felül}} + P_{\text{alul}}) \cdot (1 - \cos \Theta), (P_{\text{felül}} - P_{\text{alul}}) \sin \Theta].$$

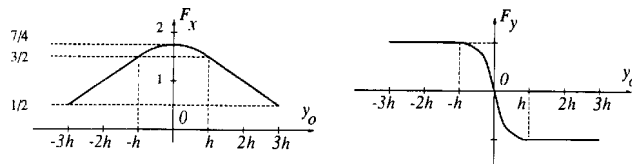
A prizma megfelelő lapjaira eső teljesítményt úgy számíthatjuk ki, hogy az egyes lapok (y , z) síkbeli vetületének hw területét megszorozzuk az adott lapra jutó átlagos intenzitással. Ez utóbbit az y -tengely mentén szakaszonként lineárisan változó intenzitáseloszlásból és az y_0 távolságtól függő geometriai tényezőkből határozhatjuk meg. A nem túl nehéz, de hosszadalmas számolás végeredménye a következő: Két lényegesen különböző esetet kell megvizsgálnunk.

a) Ha $h \leq y_0 \leq 3h$ (a prizma teljes egészében a lézersugár felső felében található), a megfelelő erő-komponensek:

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{2hwI_0}{c} \left(1 - \frac{y_0}{4h} \right) (1 - \cos \Theta), \\ F_y &= -\frac{hwI_0}{4c} \sin \Theta.\end{aligned}$$

b) Ha $0 \leq y_0 \leq h$ (a prizma alsó felének egy része belelóg a lézersugár alsó felébe), az erők:

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{hwI_0}{c} \left(\frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) (1 - \cos \Theta), \\ F_y &= -\frac{hwI_0}{c} \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h} \right) \sin \Theta.\end{aligned}$$



5. ábra

Mivel az intenzitáseloszlás szimmetrikus a lézersugár középvonalára, az $y_0 < 0$ eset a fentebb leírt $y_0 > 0$ eset tükörképe lesz. Az F_x és F_y függvények menetét a 5. ábra mutatja.

3. A megadott számadatokból az üvegprizma súlyára $mg = 1,4 \cdot 10^{-9}$ N adódik. A prizma akkor lehet (legalábbis függőleges irányban) egyensúlyban, ha $F_y = mg$. Az előző pont eredményét és a numerikus adatokat felhasználva a szükséges (maximális) lézer-intenzitásra $I_0 = 8,3 \cdot 10^8$ W/m² adódik. A lézer teljes sugárzási teljesítményét az átlagos intenzitásnak ($I_0/2$) és a lézernyaláb keresztmetszetének szorzataként kaphatjuk meg; numerikusan $P = 33,2$ W.

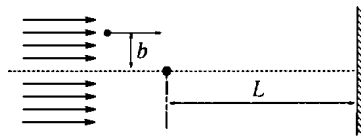
4. $y_0 = h/20$ elmozdulásnál $y_0/h = 0,05 \ll 1$, a függőleges erőkomponens tehát jól közelíthető az

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \Theta}{2c} \cdot y$$

lineáris függvénnyel. Ez egy harmonikus rezgőmozgás erőtvénnye, a megfelelő rezgésidő a „rugóállandóból” leolvasható, s numerikusan $T = 11,2$ ms.

3. feladat: Elektronnyaláb

V_0 gyorsítófeszültséggel nagy energiájú elektronok párhuzamos, homogén nyalábját állítjuk elő. Az elektronok útjába egy vékony, hosszú, pozitívan feltöltött rézdrótot helyezünk.



1. ábra. Az elektromosan feltöltött drót merőleges a papír síkjára. Az ábra nem méretarányos.

A rézdrót az elektronnyaláb eredeti irányára merőlegesen helyezkedik el (1. ábra). Az ábrán b -vel jelöltük azt a távolságot, amennyire egy-egy elektron a rézdrót mellett elhaladna, ha a drótnak nem lenne töltése. Az elektronok ezek után egy ernyőnek csapódnak, amely a drót mögött L távolságra helyezkedik el ($L \gg b$). A nyaláb eredeti kiterjedése a drót tengelyétől $\pm b_{\max}$ mértékű. A drót hossza, valamint a nyaláb szélessége a papír síkjára merőlegesen végtelen nagyra tekinthető.

Néhány numerikus adat.

a drót sugara:

$$R_0 = 10^{-6} \text{ m,}$$

b legnagyobb értéke:

$$b_{\max} = 10^{-4} \text{ m,}$$

a drót hosszegységre jutó töltése:

$$q_{\text{linear}} = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m,}$$

gyorsítófeszültség:

$$V_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ V,}$$

az ernyő távolsága a dróttól:

$$L = 0,3 \text{ m.}$$

Megjegyzés. A 2–4 alkérdések esetén alkalmazhatsz olyan elfogadható közelítéseket, melyek segítségével képlet formájában és numerikusan is eljuthatsz a megoldásig.

1. Számítsd ki a drót által létrehozott $\mathbf{E}$ elektromos térerősséget! Ábrázold vázlatosan $\mathbf{E}$ nagyságát a drót tengelyétől mért távolság függvényében!

2. Számítsd ki, hogy mekkora szöggel térül el egy elektron a klasszikus fizika törvényei szerint! Add meg ezt az eltérülési szöget a b paraméter olyan értékeire, amelyeknél az elektron nem ütközik neki a drótnak! Jelöljük Θ -val azt a (kicsiny) szöget, amelyet az elektron sebessége az ernyőnek csapódó elektron sebességével zár be! Mekkora ennek a Θ szögnek az értéke?

3. Számold ki és vázold is fel, hogy a klasszikus fizika milyen becsapódási képet (azaz elektronintenzitás-eloszlást) jósol az ernyőre érkező elektronokra!

4. A kvantumfizika a klasszikus elmélettől lényegesen különböző elektronintenzitás-eloszlást jósol. Vázold fel a hullámmechanika által jósolt eloszlásképet és számszerűen is jellemezd ezt az elektroneloszlást!

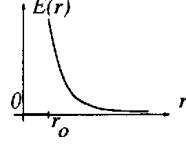
Megoldás. 1. A hengerszimmetria miatt az elektromos térerősség a dróthoz képest sugárirányú kell legyen és a nagysága csak a dróttól mért r távolságtól függhet. Helyezzünk gondolatban egy $r > r_0$ sugarú hengert a drót köré és alkalmazzuk rá Gauss törvényét:

$$2\pi r E(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{\varepsilon_0},$$

ahonnan

$$E(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{0,79 \text{ N}}{r \text{ C}} \quad (r \geq r_0).$$

Ha $r < r_0$, az elektromos térerősség nulla (hiszen a réz jó elektromos vezető).



2. ábra

2. A feladat szövege szerint az elektronok Θ eltérülési szöge kicsiny. Ennek a szögnek a nagyságát közelítőleg úgy számíthatjuk ki, hogy elosztjuk az elektronnak a haladás irányára merőlegesen szerzett lendületét a kezdeti lendület nagyságával:

$$\Theta \approx \frac{|\Delta \mathbf{p}|}{mv_0}.$$

A merőleges impulzus értékére a következő nagyságrendi becslés adható: A haladás irányára merőleges erő nagysága (a drót közelében, vagyis ott, ahol a hatása számottevő) $(eq_{\text{linear}})/(2\pi\varepsilon_0 b)$. Ez az erő hozzávetőlegesen annyi ideig hat a v_0 sebességgel mozgó elektrorra, ameddig az kb. $2b$ utat tesz meg; vagyis a drót elektrosztatikus tere által kifejtett „erőlökés” ideje $t \approx 2b/v_0$. Newton törvénye szerint az erő nagyságának és az időtartamának szorzata éppen az impulzusváltozás nagyságával egyenlő:

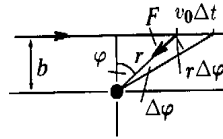
$$|\Delta \mathbf{p}| \approx \frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0 b} \cdot \frac{2b}{v_0} = \frac{eq_{\text{linear}}}{\pi\varepsilon_0 v_0},$$

az eltérülés szöge pedig

$$\Theta \approx \frac{eq_{\text{linear}}}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{\text{linear}}}{2V_0 \pi \varepsilon_0} = 4 \cdot 10^{-5}.$$

(Felhasználtuk az energiamegmaradást kifejező $mv_0^2/2 = eV_0$ összefüggést.) Megjegyezzük, hogy ez az eltérülési szög nagyon kicsiny és *független* a b ütközési paramétértől. (Ez utóbbi tulajdonság, amely a feladat kétdimenziós jellegének következménye, első ránézésre igen meglepőnek tűnik. A dróttól távolabb elrepülő részecskék azért térülnek el ugyanakkora szöggel, mint a – mondjuk – kétszer közelebb haladók, mert a rájuk ható erő ugyan kétszer kisebb, az erőhatás szempontjából lényeges idő viszont kétszer hosszabb!) A rézdrót pozitív elektromos töltése a negatív elektronokat a drót felé téríti el, igaz – mint láttuk – igen kicsiny mértékben!

Pontosabb és elméletileg jobban megalapozott becslést kapunk, ha az elektronok (egyeneshez közeli) pályájának minden részén figyelembe vesszük a merőleges erőhatást, s ezek járulékait összegezve számítjuk ki a merőleges impulzusváltozást.



3. ábra

A 3. ábra jelöléseit használva

$$F_m = \frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos \varphi,$$

$$v_0 \Delta t \cos \varphi = r \Delta \varphi,$$

ahonnan

$$F_m \Delta t = \frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0 v_0} \Delta \varphi.$$

Összegezzük most az egyes vonaldarabkákra vonatkozó erőlökéseket! Mivel a φ szög $-\pi/2$ -től $+\pi/2$ -ig változik, a teljes impulzusváltozásra

$$|\Delta \mathbf{p}| = \frac{eq_{\text{linear}}}{2\varepsilon_0 v_0},$$

az eltérülés szögére pedig

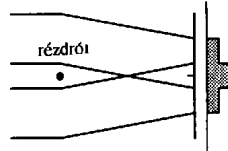
$$\Theta = \frac{eq_{\text{linear}}}{2\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{\text{linear}}}{4V_0 \varepsilon_0} = 6,21 \cdot 10^{-5},$$

a korábbi durva becslésétől mindössze egy $\pi/2$ -s tényezőben különböző érték adódik.

3. Az elektronok pályagörbéje két olyan egyenessel közelíthető, melyek a drót közelében megtörnek, hajlásszögük a fentebb kiszámított Θ . Az ernyőre érkező elektronok mindegyike

$$\Theta L = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ m} \approx 19 r_0$$

távolsággal tolódik el az eredeti haladási irányához képest. A rézdrót túlsó oldalán haladó elektronok eltolódása ellentétes irányú, így a teljes intenzitáseloszlás az ernyőn két egymásra csúsztatott (összegezett) téglalappal szemléltethető (4. ábra).



4. ábra
az ábra nem méretarányos

Az átfedő tartomány szélessége

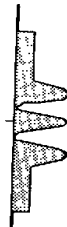
$$2 \cdot (\Theta L - r_0) \approx 36 r_0 = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Ebben a tartományban az intenzitás – a klasszikus fizika szerint – egyenletes és éppen kétszerese az eredeti elektron-intenzitásnak.

4. A kvantumelmélet (de Broglie hipotézise) szerint a V_0 feszültséggel felgyorsított, v_0 sebességű elektronok úgy viselkednek, mint a

$$\lambda = \frac{h}{mv_0} = \frac{h}{\sqrt{2meV_0}} = 8,68 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

hullámhosszúságú hullámok. A de Broglie-féle hullámhossz sok-sok nagyságrenddel kisebb, mint a nyíláb $2b_{\text{max}}$ szélessége, emiatt az „egyréses elhajlási effektusokat” nyugodtan elhanyagolhatjuk.



5. ábra

A drót jobb oldalán két, egymással kicsiny (2Θ) szögben haladó elektronhullám fokozatosan átfedi egymást, s interferencia-maximumok és -minimumok alakulnak ki. Az erősítés, illetve gyengítés feltétele az útkülönbségek és a hullámhossz viszonyából kapható meg. Az intenzitáseloszlás jellegét a vázlatos 5. ábra mutatja. Két intenzitás-maximum távolsága az ernyőn

$$\frac{\lambda/2}{\sin \Theta_{\text{max}}} \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Mivel az átfedési tartomány teljes szélessége $3,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, kb. 500 interferenciacsík figyelhető meg. (Megjegyezzük, hogy a csíkok közötti távolság – a szokásos „kétréses interferencia kísérletektől” eltérően – *nem* függ sem b -tól, sem L -től.)

Kísérleti verseny *

1. feladat: A nitrogén forráshőjének mérése

* A rendelkezésre álló idő: 2 x 2,5 óra

A mérés tárgya a nitrogén L forráshőjének meghatározása két különböző módszerrel. Az *1. módszer* esetén egy alumíniumdarabot kell folyékony nitrogénbe helyezni, és meg kell mérni, mennyi nitrogén forr el, mielőtt az alumínium lehül. A *2. módszernél* adott ütemben hőt közlünk a folyékony nitrogénnel, és azt kell meghatározni, hogy mennyivel változik meg a nitrogén forrásának üteme a fűtés hatására.

A rendelkezésre álló folyékony nitrogén egy „tároló” tartályban van. Ebből tölthetsz megfelelő mennyiséget a „minta” tartályba, amit a mérlegre kell helyezni. A mérlegen leolvasható tömeg a nitrogén forrása következtében egyre csökken. Ennek több oka van:

- mert a tartály nem tökéletes hőszigetelő,
- mert a folyékony nitrogén az alumíniumdarab lehülése során hőt vesz fel (*1. módszer*),
- mert a folyékony nitrogén hőt vesz fel, amikor a nitrogénbe helyezett ellenálláson elektromos áram folyik át (*2. módszer*).

Egy univerzális mérőműszer (multiméter), amely feszültség (V), áramerősség (I) és ellenállás (R) mérésére használható, továbbá egy stopper áll rendelkezésedre.

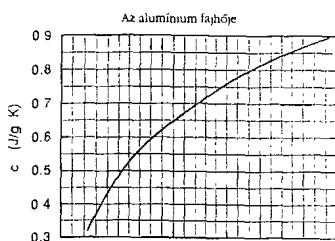
FIGYELEM: (1) A folyékony nitrogén nagyon hideg, tehát semmilyen körülmények között ne érh hozzá, és azokhoz a testekhez sem, amelyeket nitrogénnel lehűtöttél! Vigyázz, hogy a ruhádra se kerüljön folyékony nitrogén!

(2) Semmit ne dobj a folyékony nitrogénbe, és mindvégig viseld a védőszemüveget!

(3) Az alumínium-darabkát lassan merítsd a nitrogénbe, mivel egyébként túlságosan heves forrásba jönne a folyékony nitrogén. A bemejtéshez használd a mellékelt zsineget!

(4) Az ellenállás nagyon felforrósodhat, ha nem merülne a folyékony nitrogénbe. Csak akkor engedj át áramot az ellenálláson, ha az a tartályban van, és teljesen ellepi a folyékony nitrogén!

1. módszer



1. ábra

Az alumínium c fajhője lényeges mértékben változik szobahőmérséklet és a folyékony nitrogén forrásponti hőmérséklete között, ami légköri nyomáson 77 K. A fajhő hőmérsékletfüggését az *1. ábra* mutatja.

Végezz méréseket, melyek alapján meghatározhatod, mennyi nitrogén forr el az alumíniumdarab lehülése során! Mérési eredményeid, valamint a fajhőgrafikon felhasználásával határozd meg a nitrogén forráshőjét! Feltételezheted, hogy a szobahőmérséklet 21 ± 2 °C. Feltétlenül adj számításon alapuló hibabecslést az általad mért forráshőre!

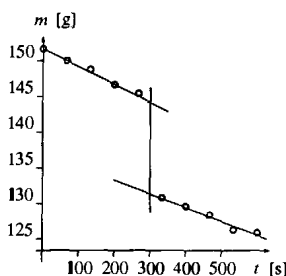
2. módszer

Végezz méréseket, amelyek alapján meghatározhatod a folyékony nitrogén forrásának sebességét, amikor áram folyik át a nitrogénbe helyezett ellenálláson. (Egyenáramú tápegység áll rendelkezésedre.)

Eredményeid alapján határozd meg a nitrogén forráshőjét! Feltétlenül adj számításon alapuló hibabecslést az általad mért mennyiségre!

Megoldás. 1. módszer.

A rendszer (tárolóedény + folyékony nitrogén + később belehelyezett alumíniumdarabka) tömegét és az időt folyamatosan mérve pl. a *2. ábrán* látható adatokat kapjuk.



2. ábra

Az alumíniumdarabka behelyezését megelőző, majd az azt követő időszak adataira jó közelítéssel egyeneseket illeszthetünk. (Vigyázat: a két egyenes meredeksége egy kicsit különbözik, hiszen a kisebb tömegű nitrogén kisebb felületen érintkezik a tárolóedény falával, s emiatt a hőátadás is lassabb, mint kezdetben. Azok a versenyzők, akik erre a „finomságra” nem figyeltek fel, pontot veszítettek.)

Az egyeneseket az alumíniumdarabka behelyezésének pillanatáig extrapolálva a függvény ugrásából megkapjuk a szilárd test által leadott Q hő hatására elforrt nitrogén ΔM tömegét. A leadott hőt az alumínium $c(T)$ fajhőjének integrálásával, a

$$Q = m \int_{77 \text{ K}}^{294 \text{ K}} c(T) dT$$

integrálnak (numerikus) meghatározásával (a $c(T)$ függvény görbe alatti területéből, a megfelelő kicsiny téglalapok összeszámlálásával) kaphatjuk meg (m az alumínium mérhető tömege). Fennáll továbbá, hogy $Q = L \cdot \Delta M$, ahonnan a keresett L forráshő már könnyen kiszámítható.

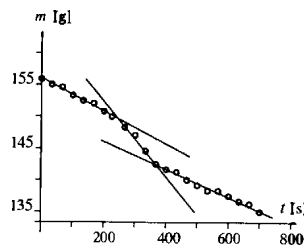
Az egyik mérési sorozatban numerikusan a következő értékeket kapták:

$$m = (19,4 \pm 0,1) \text{ g}; \quad \int c(T) dT = (151 \pm 2) \text{ J/g}; \quad \Delta M = (2930 \pm 42) \text{ J},$$

s ezekből

$$L = (202 \pm 5) \text{ J/g}.$$

2. módszer. Mérhetjük a rendszer tömegének időbeli változását elektromos fűtés nélkül, rövid ideig bekapcsolt fűtéssel, majd ismét fűtés nélkül (**3. ábra**).



3. ábra

Az egyes szakaszokra egyeneseket illesztve leolvashatjuk a folyékony nitrogén tömegének *átlagos* változási ütemét. A fűtés nélküli szakaszok adatait extrapolálva megkapjuk a fűtés ideje alatti hőveszteség által elforrt nitrogén tömegét, illetve az ismert (mérhető) nagyságú elektromos energia által elforrt nitrogén ΔM tömegét. Ezekből az adatokból az egyik méréssorozatban a keresett forráshőre

$$L = (209 \pm 9) \text{ J/g}$$

érték adódott.

2. feladat: Mágneses nyomatók és mágneses terek mérése

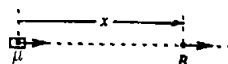
Ez a kísérlet két részből áll:

1. részfeladat. Meg kell határozni egy kisméretű, henger alakú állandó mágnes mágneses nyomatékának nagyságát. Ez a mágnes az „X” jelű borítékban található. (Egy hasonló mágnes, amit szintén használnod kell, az „A” jelű borítékban találhatsz meg.)

2. részfeladat. Egy tengely-szimmetrikus mágnes mágneses terét kell megvizsgálnod. Ez a mágnes a „B”-jelű borítékban található.

Méréseid során felhasználhatod az alábbiakat:

1. Egy mágneses dipól mágneses tere a szimmetriatengely mentén, a mágnes középpontjától x távolságban egy olyan $\mathbf{B}$ vektor, amely párhuzamos a tengellyel, nagysága pedig:



$$B(x) = \frac{2\mu K}{|x|^3},$$

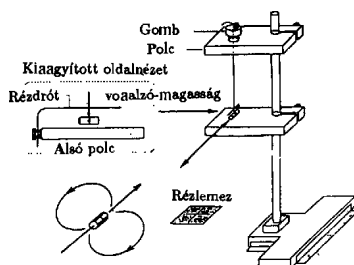
ahol $\mathbf{B}$ mértékegysége tesla [$T = \text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})$], $K = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$, x m-ben, μ pedig $\text{A} \cdot \text{m}^2$ -ben értendő.

2. Egy szabadon felfüggesztett, vízszintes mágnes (a Föld mágneses terében mozgó iránytűhöz hasonló) kicsiny torziós lengéseinek periódusideje:

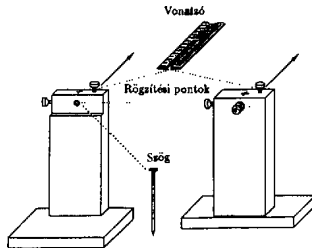
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B_h}},$$

ahol B_h a mágnes körüli *eredő* mágneses indukcióvektor vízszintes (horizontális) komponense, I pedig a mágnes tehetetlenségi nyomatéka a középpontján átmenő függőleges tengely körül.

A mérőberendezés



1. ábra



2. ábra

A mérőberendezés vázlata az 1. ábrán látható. Egy faállvány felső polcáról egy fonál lóg lefelé. A fonál alsó végéhez mágneset (akár az „X”, akár pedig az „A” jelűt) rögzíthetünk. Az alsó polcra egy rézlemez helyezhetsz, éppen a felfüggesztett mágnes alá, így ha szükséges, csillapíthatod a mágnes mozgását.

Két további (segéd-)faállvány is rendelkezésedre áll. Ezek egyikét arra használhatod az 1. részfeladatnál, hogy akár az „A”, akár az „X” mágneset tartsa. A másik faállvány a 2. részfeladatnál a „B” jelű mágnesrendszer rögzítésére szolgál. A felfüggesztett mágnes és a segédállvány közötti távolságot vonalzóval mérheted meg; a vonalzót a 2. ábrán nyíllal megjelölt helyre rögzítheted.

Figyelem! Ezek a mágnesek nagyon erősek. Tartsd erősen a mágneseket, nehogy kiugorjanak a kezedből!

1. részfeladat.

Az „X”-jelű borítékban egy *mágnespár* található, melynek végeit betű-szám kombinációval jelöltük meg. Ennek az összetett rendszernek a μ_X mágneses momentumát kell meghatároznod. (Tartsd mindig együtt a mágnespárt!) A mágnespár tehetetlenségi nyomatékát kiszámították, és ráírták az „X” borítékra.

Az „A”-jelű borítékban egy másik mágnespár van, amelynek északi pólusát fekete, déli pólusát piros foltal jelölték meg. Ez a mágnespár hasonló az „X”-belihez, bár a μ_A mágneses momentumról nem tétélezhetjük fel, hogy megegyezne μ_X értékével.

Bármelyik mágnespár darabjait „szétcsúsztathatod”, közéjük bronzkorongot helyezhetsz, amely segítségével a fonál végéhez rögzítheted a rendszert. Így „iránytűt” készíthetsz, melynek torziós lengésidejét meg tudod mérni. (Az „X” borítékon feltüntetett I_X érték a bronzkoronggal együtt értendő.)

A faállvány lyukába helyezve valamelyik mágnespárt, hatást tudsz gyakorolni az „iránytű”-mágnespárra:

- megváltoztathatod a torziós lengéseinek periódus idejét,
- megváltoztathatod az iránytű egyensúlyi helyzetének szögállását.

A szögelfordulást legjobban úgy figyelheted meg, hogy néhány milliméterrel az „iránytű” alá helyezed a rézlemez, s így elektromágneses csillapítást hozol létre. *Kérjük, hogy a rézlemezre ne írd, s jeleket se tegyél rá!*

Vedd észre, hogy nem elég egyféle mágnes-elrendezéssel dolgozni! *Rajzolj világosan azonosítható ábrákat az általad használt összes kísérleti elrendezésről! Írd le azokat az egyenleteket is, amelyek kapcsolatot teremtenek az egyes elrendezésekben mérhető mennyiségek és a keresett μ_X között!*

Az összes mágnes mindvégig ugyanabban a vízszintes síkban kell maradjon! Megjegyezzük, hogy a polcos faállvány felső lapján lévő gomb elforgatható, továbbá a fonál hossza változtatható. Mindkét polc helyzete változtatható.

Fontos gyakorlati tanácsok!

1. Iránytű-elrendezés és használata: Tartsd az adott mágnespár egyik mágnesét a hüvelyk- és a mutatóujjad között. Helyezd a mágnes egyik végére a bronzkorongot! Ezután *óvatosan, a fonál megfeszítése nélkül*, érintsd oda a másik mágnes is. Így állítsd össze az („A” vagy „X”) iránytű-párt. Hasonlóan járj el az iránytű szétszedésekor is, ne feszítsd meg a fonalat! *Vigyázat:* A mágnesek, vagy mágnespárok hirtelen összecsatlása *elszakíthatja a fonalat, vagy összetörheti a mágnes*. Ha mégis elszakadna a fonál, kicsi hurokkal kösd meg! (Szükség esetén fordulj a rendezőkhöz!)

2. Csak a *forgási (torziós)* rezgésekkel foglalkozzál! Az „inga-módus” elkerülése érdekében egy kis rézdrótot erősítettek a tartóállvány alsó polcára. Ezt a drótot fordítsd el úgy, hogy a vízszintes része éppen hozzáérjen a fonálhoz, körülbelül 2 mm-rel a fonálon levő csomó felett. Fordítsd tovább óvatosan a drótot ugyanabba az irányba még egy-két mm-rel! *Vigyázat:* Ha ezt nem teszed, a kétféle rezgési módus „összecsatolódik”, periodikusan változtatva a torziós lengés amplitúdóját és befolyásolva a periódusidejét. *A torziós lengéseket a 2. ábrán látható szöggel indíthatod el.*

3. A mágneses vagy mágnesezhető tárgyakat *ne mozgasd* el a mérés ideje alatt, s lehetőleg tartsd ezeket minél *messzebb* a kísérleti berendezéstől! Ilyen tárgyak például: szög, karóra, toll stb. Az asztal egyes részei vasból készültek, ha megváltoztatod a berendezés helyzetét, ezt a tényt is vedd figyelembe!

Javaslatok:

i) A fonál torziómodulusa elég kicsi. A fonál csavarodásának hatását emiatt elhanyagolhatod, ha a fonál elegendően (körülbelül 15 cm) hosszú.

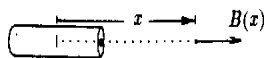
ii) Előfordulhat, hogy valamelyik mágnespár nem vízszintes helyzetben lóg. Ezt a Föld mágneses terének függőleges összetevője okozza. Ennek hatása kicsiny és *elhanyagolható*. Más szóval: a mágnes vízszintesnek tekinthető!

iii) Azt tanácsoljuk, hogy az 1. részfeladat hibaszámítását halaszd későbbre; csak a 2. részfeladathoz szükséges mérések elvégzése után számold hibákat.

iv) *Semmiféle feltevést nem szabad tenned a Föld mágneses terének nagyságáról!*

2. részfeladat.

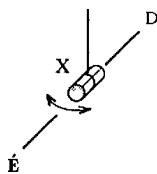
A „B” borítékban lévő alumíniumcső hengerszimmetrikus elrendezésű mágneseket tartalmaz. Ennek a mágnesrendszernek az x -tengely menti B_x mágneses tere a cső középpontjáról mért x távolság függvényében a $B(x) = C x^p$ összefüggés szerint változik. Határozd meg a p kitevő értékét, hozzávetőleges hibájával együtt! A térerősséget a cső *fekete folttal jelölt végének irányában kell vizsgálnod* (3. ábra)!



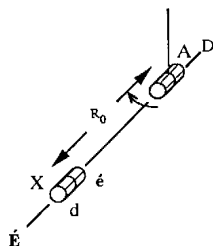
3. ábra

Megoldás. 1. részfeladat. Az „X” jelű mágnespárt felfüggesztve és meglengetve (4. ábra), a T_X lengésidejének méréséből meghatározhatjuk a μ_X mágneses nyomaték és az (ismeretlen) B_h indukcióvektor-komponens szorzatát:

$$\mu_X B_h = I_X (2\pi/T_X)^2.$$



4. ábra



5. ábra

Ha most az „A” jelű mágnespárból készítünk iránytűt, hagyjuk, hogy beálljon észak-dél irányba, majd az „X” jelű mágnes az északi (vagy a déli) irányból óvatosan közelítjük az iránytűhöz, egy bizonyos (jól mérhető) R_0 távolságnál „kifordítja” az iránytűt (5. ábra). Ez akkor következik be, amikor az „X” jelű mágnes tere éppen kiejti a földi mágneses mező vízszintes összetevőjét, azaz

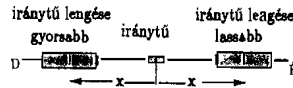
$$\frac{2\mu_X K}{R_0^3} = B_h.$$

A fenti két összefüggésből a keresett mágneses momentum

$$\mu_X = \frac{R_0^{(3/2)}}{(2K)^{1/2}} \cdot \frac{2\pi}{T_X} \cdot (I_X)^{1/2}.$$

2. *részfeladat.* Az ismeretlen $B(x)$ mágneses indukciót három különböző módszerrel is meg lehet mérni. Nyilvánvaló, hogy a p kitevő értékét annál pontosabban tudjuk számolni, minél szélesebb x -tartományban mérjük a mágneses indukciót. Különböző távolság-tartományokban érdemes más-más mérési módszereket alkalmazni.

a) *Közepesen nagy távolságoknál* az „X” mágnespárból készített iránytű lengésidőjét, illetve a lengésidő változását mérhetjük az alumíniumcső különböző helyzeteiben. Érdemes az alumíniumcsőbe rejtett mágnesekkel először gyorsítani, majd lelassítani az „X” jelű mágnes torziós lengéseit (6. ábra).



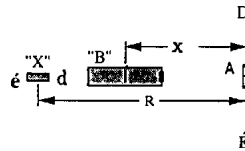
6. ábra

Könnyen belátható, hogy a keresett indukció a

$$B(x) = \frac{2\pi^2 I_X}{\mu_X} \left[\left(\frac{1}{T^2} \right)_{\text{lassú}} - \left(\frac{1}{T^2} \right)_{\text{gyors}} \right]$$

összefüggésből számítható ki.

b) *Kicsiny távolságoknál* a fenti módszer nem alkalmazható, mert az iránytű lengése nagyon gyorsá válik, illetve a „B” jelű mágnes magához rántja a másik mágneset. Ilyenkor célszerű a „lenullázós” módszert választani, vagyis az „A” jelű mágnesből készített iránytűt a „B” és az „X” jelű mágnesek alkalmas elhelyezésével éppen kifordíthatjuk az észak–déli irányból (7. ábra).



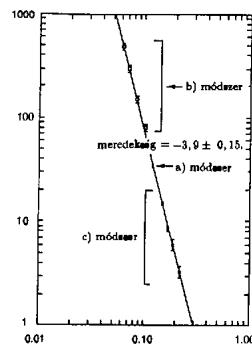
7. ábra

Amikor ez bekövetkezik, akkor fennáll, hogy

$$B(x) = \frac{2K\mu_X}{R^3}.$$

c) *Nagy távolságoknál* a legelső módszer javított változata a legcélszerűbb. Most is az „X” jelű mágnes torziós lengéseit, azok megváltozását mérjük, de ez a változás x nagy értékeinél alig észrevehető, hiszen a földmágnességhez képest a mérendő mágneses mező nagyon kicsi. Alkalmazzunk tehát egy „trükköt”, nevezetesen azt, hogy a megfelelően elhelyezett „A” mágnessel „lecsökkenthetjük” a földi mágneses indukció vízszintes komponensét (ezt a helyzetet az „A” mágnes 180 fokok kifordításával kereshetjük meg), majd az a) módszer szerint mérjük a lengésidő megváltozását.

(A három módszer következetes alkalmazását az adott idő (2,5 óra!) alatt nyilván nem lehetett a versenyzőktől elvárni; itt most csak a teljesség igénye, a mérési feladatban rejlő finomságok kiemelése miatt írtuk le ezeket. A versenyzők szinte kivétel nélkül csak az egyik, általában az a) módszerrel határozták meg a mágneses indukciót.)



8. ábra

A mérési adatokból a p hatványkitevőt úgy határozhatjuk meg, hogy $\log B$ -t ábrázoljuk $\log x$ függvényében (vagy log-log papíron közvetlenül a $B(x)$ függvényt), s az adatokra egyenest illesztve annak meredeksége a keresett exponens. A 8. ábra a feladat kitűzőinek igen gondos mérési adatait mutatja, az illesztett egyenes meredeksége

$$P_{\text{mért}} = -3,9 \pm 0,15.$$

Megjegyezzük, hogy az alumíniumcsőben két – közel egyforma – mágnezt helyeztek el *egymással szembe fordítva*. Ezek eredő mágneses dipólnyomatéka nulla, az eredő mágneses tér (a mágnesektől viszonylag messze) kvadrupól-jellegű, erőssége a szimmetriatengelye mentén $1/x^4$ szerint változik.