1. Amennyiben a két adott pont a háromszög

a) alapjának két végpontja, úgy a harmadik csúcs az adott szakasz felező merőlegesén van, kivéve a szakasz felezőpontját, így

$$C \in \{(x;y)|3x+2y=2\}\backslash\{(-2;4)\};$$

b) egyik szárának két végpontja, akkor az egyiküktől a másik távolságában lévő pontok és csak ezek jöhetnek szóba, tehát

$$C \in \{(x;y)|(x-1)^2+(y-6)^2=52\}\backslash\{(-5;2),(7;10)\}$$

vagy

$$C \in \{(x;y)|(x+5)^2+(y-2)^2=52\}\backslash\{(1;6),(-11;-2)\}.$$

2. Az $a,\ aq,\ aq^2$ természetes számok. $aq^2=a+6,\ q^2=1+\frac{6}{a},\ q=\sqrt{1+\frac{6}{a}}$. Az $aq=\sqrt{a^2+6a}$ természetes számra

$$a<\sqrt{a^2+6a}<a+3, \qquad \text{így} \quad a^2+6a=\begin{cases}(a+1)^2 & \text{vagy}\\ (a+2)^2. & \end{cases}$$

Az egyetlen pozitív egész megoldás $a=2$, így $q=\sqrt{1+\frac{6}{2}}=2$, tehát az első három elem összege 14.

3. Mivel CO felezi a szárak 120°-os szögét, azért $OCA'\sphericalangle=60°$, továbbá $OA'C\sphericalangle=90°$, így az OCA' háromszögben $OA'=r$ miatt $CA'=\frac{r}{\sqrt{3}}$ és $CO=2CA'=2\frac{r}{\sqrt{3}}$.

1993-12-500-1.eps

A $CC'B$ háromszög szögei szintén $60°,\ 90°$ illetve $30°$ nagyságúak, ezért

$$C'B=\sqrt{3}CC'=\sqrt{3}\left(r+2\frac{r}{\sqrt{3}}\right).$$

A háromszög oldalai így:

$$AB=2C'B=2\sqrt{3}\left(r+2\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=(2\sqrt{3}+4)r$$

és

$$AC=BC=2CC'=2\left(r+2\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)r;$$

a kerülete és területe az előzőek szerint

$$k=AB+BC+CA=AB+2BC=(2\sqrt{3}+4)r+2\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)r=\left(2\sqrt{3}+8+\frac{8}{\sqrt{3}}\right)r;$$

és

$$t=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CC'=C'B\cdot CC'=\left(\sqrt{3}+4+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)r^2.$$

4. Az egyenletrendszer pontosan akkor értelmezhető, ha x és y egyaránt 1-től különböző pozitív számok. Az első egyenlet, $\log_x y+\frac{1}{\log_x y}=\frac{5}{2}$ alapján $\log_x y=2$ vagy $\log_x y=\frac{1}{2}$, azaz $y=x^2$ vagy $x=y^2$. Ezeket a második egyenletbe helyettesítve – egyúttal figyelemmel x és y pozitív előjelére, – kapjuk, hogy

i) $4\sqrt{x}-3x=1$, szorzattá alakítva $(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)=0, x=1$ vagy $x=\frac{1}{9}$. Az első érték nem felel meg az eredeti kikötésünknek, a második alapján $y=\frac{1}{81}$ illetve

ii) $4y-3\sqrt{y}=1$, másképpen $(\sqrt{y}-1)(4\sqrt{y}+1)=0, y=1$ (mivel a második tényező biztosan pozitív). Ezen az ágon tehát nem kaptunk megoldást.

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{81}\right)$ pár.

5. Mivel $AP=BP$, azért P-nek illeszkednie kell az AB szakasz felező merőlegesére, amellyel az eredeti háromszöget az AFC és BFC – szintén egyenlő szárú derékszögű – háromszögekre oszthatjuk.

1993-12-501-1.eps

Legyen $AF = FC = x$!

i) Ha P a háromszögön belül van, akkor Pitagorasz tétele szerint

$$AF^2 + FP^2 = AP^2,$$

azaz $x^2 + (x-1)^2 = 5$, így $x = 2$, a háromszög területe $T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FC = x^2 = 4$ területegység.

ii) Amennyiben P a szakaszfelező merőleges C-n túli meghosszabbításán van, úgy az előzőek mintájára $x^2 + (x+1)^2 = 5$, vagyis $x = 1$, így a terület is 1.

iii) P nem lehet az FC egyenes F-en túli meghosszabbításán, mivel akkor az APC háromszögben az $AP = \sqrt{5}$ hosszú oldallal szemben $45°$-os, míg a $CP = 1$ oldallal szemben egy $45°$-osnál nagyobb szög volna, ami nem lehetséges.

6. Az adott kifejezés értelmezhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy

i) a négyzetgyök miatt	$3\cos x - \cos 2x - 2 \geq 0,$	és
ii) a logaritmus miatt	$2 - x - x^2 > 0,$	és
iii) a nevező miatt	$2 - x - x^2 \neq 1$	teljesüljön.

Az egyes feltételeket külön-külön vizsgálva:

i) $3\cos x - \cos 2x - 2 = -(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = -(2\cos x - 1)(\cos x - 1)$, ami éppen akkor nemnegatív, ha $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$;

ii) $2 - x - x^2 = -(x+2)(x-1)$, akkor és csak akkor pozitív, ha $-2 < x < 1$;

iii) $2 - x - x^2 \neq 1$, tehát x nem lehet sem $(\sqrt{5}-1)/2$, sem $(-\sqrt{5}-1)/2$.

Összefoglalva – például a számegyenesen történő ábrázolással –

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 1\right) \setminus \left\{\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right\}.$$

7. Legyen az egysíkú AF és $A'B'$ egyenesek metszéspontja M. Ekkor – mivel F a BB' felezőpontja – az ABF és $FB'M$ háromszögek egybevágósága miatt $B'M = AB$.

1993-12-502-1.eps

Összekötve az $A'B'C'D'$ síkban lévő M és D' pontokat, ez az egyenes a $B'C'$ szakaszt annak G felezőpontjában metszi. Ez a pont szintén eleme a metsző síknak, tehát az a kockából az $AFGD'$ egyenlő szárú trapézt metszi ki, egyúttal az $AD'A'FGB'$ csonkagúlát vágja le, ennek térfogata az $AD'A'M$ gúla térfogatának $\frac{7}{8}$-része, vagyis – a kocka élét egységnyinek választva:

$$V_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{7}{24},$$

így a maradék test V_2 térfogata $1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$, tehát: $V_1 : V_2 = 7 : 17$.

8. a) Igazoljuk először, hogy minden konvex négyszögben $t_1 t_3 = t_2 t_4$, ahol t_1, t_2, t_3 és t_4 az átlók által létrehozott háromszögek területét jelölik. Például a trigonometrikus területképlettel

$$\begin{aligned} t_1 t_3 &= \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MD \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} \cdot MB \cdot MC \cdot \sin x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MB \cdot \sin(180° - x) \cdot \frac{1}{2} \cdot MC \cdot MD \cdot \sin(180° - x) = t_2 t_4. \end{aligned}$$

b) Mivel feladatunkban a négyszög egészének területéről kell mondanunk valamit, keressünk kapcsolatot a t_1, t_2, t_3 és t_4 mennyiségek összege (a teljes terület) és szorzataik (ezek közül két egyenlő adott) között. A – számtani és mértani középre vonatkozó – Cauchy-egyenlőtlenség szerint az a és b nemnegatív számokra $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$, kis átrendezéssel $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_1 + t_3 + t_2 + t_4 \geq 2\sqrt{t_1 t_3} + 2\sqrt{t_2 t_4} = 2,$$

ezért a négyszög területe legalább 2 egység.

c) Egy adott körbe írható négyszögek területe nyilván nem lehet tetszőlegesen nagy, a maximális területtel közülük a négyzet rendelkezik. Ez belátható – többek között – úgy, hogy a négyszög két szemközti csúcsát rögzítettnek gondolva, a másik kettőt az ívfelező pontokba – tehát egy átmérő két végpontjába – mozgatva a terület növekszik (biztosan nem csökken), majd a szemközti csúcsok szerepét megcserélve ismét nő. Ekkor az eredeti négyszögünket – területét nem csökkentve – négyzetté alakítottuk, annak területe tehát bármely más négyszögét meghaladja. Feladatunkban egy egységnyi sugarú körbe írtunk négyszöget. Az előzőek szerint tehát ennek területe nem lehet nagyobb, mint a körbe írható négyzet területe, azaz 2 területegység.

A b) és c)-beli eredményeink alapján állíthatjuk, hogy a vizsgált négyszög területe 2 egység.