Megoldásvázlatok és eredmények az áprilisi szám mérőlapjához

1.a. A négyzetgyökvonás miatt $4-x^2 \geqslant 0$, azaz $-2 \leqslant x \leqslant 2$, egyúttal a baloldalon álló $\sqrt{4-x^2}$ kifejezés sem lehet negatív. Ha $x=-1$ vagy $x=-2$ vagy $x=2$, akkor a bal oldal 0. A szorzat pontosan akkor negatív, ha tényezői ellentétes előjelűek: $x+1<0$, ha $x<-1$. Összefoglalva: $x \in [-2,-1] \cup \{2\}$.

b. A $\cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1$ trigonometrikus azonosság és a $\operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi}{6} = 3$ egyenlőség felhasználásával:

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 2 \geqslant 0,$$

amely akkor és csak akkor igaz, ha $\cos \dfrac{x}{2} \leqslant -1$ vagy $\cos \dfrac{x}{2} \geqslant 2$. Ez utóbbi nem lehetséges. Az első relációban csak az egyenlőség teljesülhet, így $x=(2k+1)\pi,\ k \in Z$.

c. Mivel $\sqrt{5}^{\sin(1993\pi)} = \sqrt{5}^0 = 1$ és $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16 = -8$, a $3^{x^2-x} \geqslant 9$ egyenlőtlenség egyenértékű az eredetivel. Tekintve, hogy a 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x^2 - x \geq 2$ következik, ahonnan $x \leqslant -1$ vagy $x \geqslant 2$.

1993-05-201-1.eps

1. ábra

2. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit! A vizsgált alakzat az OAC és OBD körcikk, valamint az ODC háromszög. Ez utóbbi egyenlő szárú és $OCD\sphericalangle = ODC\sphericalangle = 30°$ és $COD\sphericalangle = 120°$. A két körcikkben a középponti szögek összege $60°$, együttes kerületük: $\dfrac{2r\pi}{6}$, területük: $\dfrac{r^2\pi}{6}$.

$k = AB + BD_{\text{ív}} + DC + CA_{\text{ív}} = 2r + r\sqrt{3} + \dfrac{2r\pi}{6}$.

$$t = t_{ODC\Delta} + t_{\text{körcikkek}} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{r^2\pi}{6}.$$

3. A számtani sorozat első három eleme $a_1 = x-d$, $a_2 = x$ és $a_3 = x+d$, ahol $d \neq 0$. A feltételek szerint $g_1 = a_1a_2 = (x-d)x$, $g_2 = a_2a_3 = x(x+d)$ és $g_3 = a_3a_1 = (x+d)(x-d)$ egy mértani sorozat tagjai, ami pontosan akkor teljesül, ha

$$g_2^2 = g_1g_3, \quad \text{azaz} \quad [x(x+d)]^2 = (x-d)^2x(x+d).$$

A művelet elvégzése után $3xd = d^2$, mivel $d \neq 0$.

$3x - d = 0 \Leftrightarrow d = 3x$, ekkor $a_1 = -2x$, $a_2 = x$ és $a_3 = 4x$, valamint $g_1 = -2x^2$, $g_2 = 4x^2$ és $g_3 = -8x^2$, amiből, mivel d, és így x is 0-tól különböző, a keresett hányados $q=-2$.

4. Először vegyük észre, hogy az $AP = PB$ miatt $p \in f_{AB}$. Ezt a szakaszfelező merőlegest az AB szakasz F felezőpontja és a C pont két félegyenesre és egy szakaszra bontja. Vizsgáljuk meg, ezek melyikén helyezkedhet el a P pont *(2. ábra)*.

1993-05-202-1.eps

2. ábra

i) Ha P_1 a CF szakasz C-n túli meghosszabbításán van, akkor a P_1AF derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $AF^2 + FP_1^2 = AP_1^2$, vagyis $x^2 + (x\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^2 = 52$, amelynek pozitív gyöke $x=2$, s így a háromszög területére a $t = x^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ értéket kapjuk.

ii) Ha P_2 a CF szakasz belső pontja, akkor $x^2 + (x\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 = 52$, ebből $x=5$, a háromszög területére $t = 25\sqrt{3}$ adódik.

iii) Amennyiben P_3 a CF-nek F-en túli meghosszabbításán van $-F$-et is beleértve –, úgy az AP_3C háromszögben az $AP_3 = 2\sqrt{13}$ nagyságú oldallal szemben $30°$-os szög, míg a nála kisebb $CP_3 = 2\sqrt{3}$ szakasszal szemben egy legalább $60°$-os szög található, ez pedig nem lehetséges.

A feladat feltételeinek tehát két háromszög felel meg, területeik $4\sqrt{3}$, illetve $25\sqrt{3}$ egység.

5. Az első egyenes egyenletét átrendezve: $y = \dfrac{3}{4}x + 6$, azaz a két egyenes párhuzamos. Az $A(0;-4)$ és a $D(0;6)$ csúcspontok is azonnal meghatározhatók. Ezek a négyszög szomszédos csúcsai, $AD = 10$ egység, $DT = 8$ a beírható kör átmérője, azaz $r=4$. A beírt kör K középpontja a $(4;4)$ pont lesz *(3. ábra)*.

1993-05-202-2.eps

3. ábra

A feladat feltételei szerint a vizsgált négyszög rombusz vagy szimmetrikus trapéz lehet. Az első esetben negyedik oldalának egyenlete $x=8$, hiányzó csúcsai: $B_1(8;2)$ és $C_1(8;12)$.

Szimmetrikus trapéz esetén az AD oldal $F(0;1)$ felezőpontjának a kör $K(4;4)$ középpontjára vonatkozó $G(8;7)$ tükörképe lesz a B_2C_2 szár felezőpontja, s ettől az illető szár felével egyenlő távolságban – 5 egységnyire – keresendők az alapokon a hiányzó csúcsok: $B_2\left(\frac{16}{5};\frac{42}{5}\right)$ és $C_2\left(\frac{64}{5};\frac{28}{5}\right)$.

6. A $\sin 2x=2\sin x\cos x$ és a $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ azonosságok alkalmazásával

$$(2\cos x-1)(\sin x-p)=0 \tag{1}$$

és

$$(4\cos x-p)(\cos x-p)=0. \tag{2}$$

Látható, hogy a paramétertől függetlenül 1-nek a $\cos x=\frac{1}{2}$ megoldása, ezt a (2) egyenletbe helyettesítve a $(2-p)\left(\frac{1}{2}-p\right)=0$ egyenletet kapjuk. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p=2$ vagy $p=\frac{1}{2}$.

i) $p=2$ esetén az (1) egyenletnek a már említetteken kívül további megoldása nincs.

ii) Ha $p=\frac{1}{2}$, akkor (1)-ből $\sin x=\frac{1}{2}$ miatt például $x=\frac{\pi}{6}$ is lehetséges megoldás, ám ez az érték nem tesz eleget a (2) egyenletnek, hiszen $\left(4\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)>0$. Azaz ekvivalencia csak $p=2$ esetén áll fenn.

7. A vizsgált testnek a – kúp tengelyére illeszkedő és az alaplapjaira merőleges – síkmetszetéből a CTB derékszögű háromszögben $CT=2\varrho$, $TB=R-r$ és $CB=R+r$, így Pitagorasz tétele alapján $\varrho^2=rR$.

1993-05-203-1.eps

4. ábra

$\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp}}}=\frac{\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{2\varrho\pi}{3}(r^2+rR+R^2)}=\frac{2\varrho^2}{r^2+rR+R^2}=\frac{2rR}{r^2+rR+R^2}=\frac{2}{\frac{r}{R}+1+\frac{R}{r}}$, ekkor pedig mivel $\frac{r}{R}$ pozítiv szám, és reciproka $\left(\frac{R}{r}\right)$, összegük legalább 2, a tört nevezője legalább 3, vagyis a tört értéke legfeljebb $\frac{2}{3}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\frac{r}{R}=1$, vagyis a csonakkúp henger. „Valódi" kúp esetén a kérdéses arány $\frac{2}{3}$-nál kisebb, de bármely $\epsilon>0$ mellett van olyan arány, amelyre $\frac{V_g}{V_k}>\frac{2}{3}-\epsilon$.

8. A második egyenlet a következő alakban írható:

$$-\sin^2(\pi\ x)=\sin^2(\pi\ y).$$

Tekintve, hogy a bal oldalon nem pozítiv, a jobb oldalon pedig nem negatív szám áll, az egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha mindkét kifejezés értéke 0.

Így $\sin^2(\pi\ x)=0$ és $\sin^2(\pi\ y)=0$ miatt x és y egyaránt egész számok kell legyenek, vagyis az első egyenletet az egész számpárok körében kell megoldanunk. Átalakítva

$$[2(x+y)]^2+(x-2)^2=8,$$

de 8 két négyzetszám öszegeként csupán a $4+4$ alakban állítható elő , ezért

$$[2(x+y)]^2=4 \qquad \text{és} \qquad (x-2)^2=4.$$

A második összefüggés $x=0$ vagy $x=4$ esetén igaz, majd az x-re kapott értékek segítségével az első egyenletből y lehetséges értékei is adódnak. A feltételeknek eleget tevő számpárok tehát $(0;-1)$, $(0;1)$, $(4;-5)$ vagy $(4;-3)$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy a felsoroltak valóban megoldások.