Megoldásvázlatok, eredmények a februári szám mérőlapjához

1. Két ilyen kúp van:

$$3V_1/\pi = x_1^2 x_2,$$
$$3V_2/\pi = x_2^2 x_1,$$
$$3(V_1+V_2)/\pi = (x_1^2x_2 + x_2^2x_1) = x_1x_2(x_1+x_2) = 57 \cdot 16.$$

Vagyis $V_1 + V_2 = 304\pi$.

2. A háromszög területére ismert képletek:

$$t = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = rs,$$

ahol r a beírt kör sugara. Szorozzuk össze ezt a négy egyenletet:

$$t^4 = r_ar_br_crs(s-a)(s-b)(s-c).$$

De

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = t^2,$$

ezért $t^2 = r_ar_br_cr$. Így $t = 84$ területegység, az oldalak pedig $13, 14, 15$ egység hosszúak.

3. Három nemnegatív valós szám összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla. A 13 és a -5 az elsőt, a 13 és a -13 a másodikat teszi nullává, igy ha van megoldás, az csak a 13 lehet. Az $x = 13$ esetén a harmadik kifejezésből a $p = -20$ adódik.

4. A köréírt kör középpontja $K(4;4)$. A feltételek alapján az egyik magasság merőleges az x tengelyre, ezért az A csúcs $(2;10)$. Tudjuk, hogy a magasságpontot az oldal egyenesére tükrözve a kép a köréírt körön lesz. Ezt felhasználva: $M'(2;-2)$. Az MM' felezőpontja $(2;2)$, rajta van az x tengellyel párhuzamos oldalon. Számolással kapjuk: $B(-2;2)$, $C(10;2)$, $a = 12$, $b = 8\sqrt{2}$, $c = 4\sqrt{5}$, valamint $t = 48$ területegység. A $t = \varrho \cdot s$ képlet segítségével kapjuk a beírt kör sugarát, $\varrho = 48/(6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \approx 3$.

5. Az értelmezési tartományt az $x^2 - 8x + 15 > 0$ feltétel adja, amiből $x < 3$ vagy $5 < x$ következik.

Az egyenlet $y^2 - (a+b+1)y + (a+b) = 0$ alakú egyenletté rendezhető, ahol $y = \log_3(x^2 - 8x + 15)$, $a + b = \log_3 5 + \log_3 7 = \log_3 35$. Így $y_1 = \log_3 35$, $y_2 = 1$ $(= \log_3 3)$. Ezekből $x_1 = -2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 2$, $x_4 = 6$.

A kapott gyökök benne vannak az értelmezési tartományban. Ellenőrzéssel a helyességükről is meggyőződhetünk.

6. Az $z = \sin^2 x$ helyettesítéssel és rendezéssel kapjuk:

$$z^2 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 2^{1+\cos y}.$$

A $z = 0$ nyilván nem gyök, így $z > 0$. Az egyenlet egyik oldalán két pozitív szám és a reciprokuk szerepel, ezért ez az oldal nagyobb vagy egyenlő 4. Vagyis $\cos y = 1$, $z = \sin^2 x = 1$ kell, hogy legyen. Ebből $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -1$ adódik. A megoldás: $x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $y_2 = 2k_2\pi$, ahol k_1 és k_2 egész.

7. A keresett pont koordinátái $(\cos\alpha; \sin\alpha)$. Az α szög meghatározásával a pont is ismert lesz az egység sugarú körön. $x^2 + xy + y^2 = \cos^2 a + \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 1 + 0,5\sin 2\alpha$, ez akkor maximális, ha $\sin 2\alpha = 1$, amiből $\alpha = 45°$ vagy $\alpha = 225°$. $1 + 0,5\sin 2\alpha$ akkor minimális, ha $\sin 2\alpha = -1$, amiből $\alpha = 135°$ vagy $\alpha = 315°$.