1. a) $2x^2 - x - 1 = 0$ vagy $x^2 - 1 = 0$. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = -1$.
b) $2x^2 - x - 1 = 0$ és $x^2 - 1 = 0$. Az egyenlet megoldása: $x = 1$.

2. Nincs értelme az igazolandó azonosságnak, ha $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = 0$, és ha $\operatorname{tg}\alpha$-nak nincs értelme. Az $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + n\cdot\dfrac{\pi}{2}$ és az $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ számok kivételével minden valós számra értelmezett az azonosság. Mivel ezen a halmazon

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha},$$

ezért az azonosság a meghatározott α értékek esetén igaz.

3. $x > 0$ kell legyen. Vegyük mindkét oldal hármas alapú logaritmusát. Mivel az $x \mapsto \log_3 x$ függvény szigorúan monoton, ezért az így kapott egyenlet az eredetivel ekvivalens.

$$(\log_3)^2 = 2 + \log_3 x,$$

ahonnan $\log_3 x = 2$, $x_1 = 9$ vagy $\log_3 x = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. Az egyenlet megoldásai tehát $x_1 = 9$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

4. Legyen a harmadik oldal a, a vele szemközti szög α. A feltétel szerint

$$\frac{3\cdot 4\cdot \sin\alpha}{2} = 3\sqrt{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát $\alpha = 45^\circ$ ($\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$) vagy $\alpha = 135^\circ$ ($\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$). A harmadik oldal négyzete a koszinusztétel szerint

$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad a^2 = 3^2 + 4^2 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a^2 = 25 - 12\sqrt{2} \qquad \text{vagy} \qquad a^2 = 25 + 12\sqrt{2},$$

$$a = \sqrt{25 - 12\sqrt{2}} \approx 2{,}8 \text{ egység} \qquad \text{vagy} \qquad a = \sqrt{25 + 12\sqrt{2}} \approx 6{,}48 \text{ egység}.$$

5. A feltételek miatt az A és B pont ordinátája 9. Legyen $A(a;\ 9)$, $a > 0$ és $B\,(-b;\ 9)$, $b > 0$, hiszen a magasságpont az origóba esik. Most $AB = a + b$. Mivel $\overrightarrow{CA}\ (a; 16)$ merőleges az $\overrightarrow{MB}(-b;\ 9)$ vektorra, ezért $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$, tehát $-ab + 144 = 0$, $ab = 144$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} = 2\cdot 12 = 24$.
AB hossza akkor a legrövidebb, ha $a + b = 24$, és ekkor $a = b = 12$, tehát $A(12;\ 9)$ és $B(-12;\ 9)$.

6. Legyen P merőleges vetülete az AB egyenesen Q, az AP egyenesen R, és $AQ = x$, $BR = y$, $AB = 2a$, $AD = a$.
Az APQ, BPQ és a DPR derékszögű háromszögekből $x^2 + y^2 = 4$, $(2a - x)^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (a - y)^2 = 9$. Innen

$$x = \frac{a^2 - 3}{a}, \quad y = \frac{a^2 - 5}{2a}, \quad \text{így} \quad \left(\frac{a^2 - 3}{a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - 5}{2a}\right)^2 = 4,$$

$5a^4 - 50a^2 + 61 = 0$, $a^2 = 5 + 1{,}6\sqrt{5}$ vagy $a^2 = 5 - 1{,}6\sqrt{5}$.
A téglalap területe $t_1 = 10 + 3{,}2\sqrt{5}$ vagy $t_2 = 10 - 3{,}2\sqrt{5}$. Az első esetben a P pont a téglalapon belül van ($x > 0$, $y > 0$), a második esetben a téglalapon kívül van ($x < 0$, $y < 0$). Dolgozhatunk trigonometria alkalmazásával is.

7. Ha $2p < 0$, akkor az $x \mapsto (2p + 2) - (8x - 2p)^2$ polinomfüggvény a $[0; 3]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, így az $x = 0$ helyen veszi fel a legnagyobb értékét, tehát $2p + 2 - 4p^2 = -2$, s mivel $p < 0$, ezért $p_1 = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}$.

Ha $0 \leqslant 2p \leqslant 3$, $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{3}{2}$, akkor a $[0; 3]$ intervallumban az $x = 2p$ helyen veszi fel a polinomfüggvény a legnagyobb értékét, tehát $2p + 2 = -2$, $p = -2$, így ez esetben nem adódik megoldás.

Ha $2p > 3$, $p > \dfrac{3}{2}$, akkor a polinomfüggvény a $[0; 3]$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, így az $x = 3$ helyen veszi fel a legnagyobb értékét, tehát $2p + 2 - (3 - 2p)^2 = -2$, s mivel $p > \dfrac{3}{2}$, ezért $p_2 = \dfrac{7 + \sqrt{29}}{4}$. A keresett p értékek tehát: $\dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}$, $\dfrac{7 + \sqrt{29}}{4}$.

8. Legyen $x > y > 0$ és $x - y = k$, azaz $x = y + k$. A feltétel szerint $3x + 4y = 84$, azaz $3(y + k) + 4y = 84$, $7y + 3k = 8$, amiből $y = 12 - \frac{3k}{7}$.

y pozitív egész, ha $k = 7$, $k = 14$ vagy $k = 21$.

Ha $k = 7$, akkor $y = 9$ és $x = 16$, ha $k = 14$, akkor $y = 6$ és $x = 20$, ha pedig $k = 21$, akkor $y = 3$ és $x = 24$.

Megjegyzés. Mivel $3x = 84 - 4y$, így $x = 28 - y - \frac{y}{3}$, tehát $\frac{y}{3}$ egész. Legyen $y = 3t$, ekkor $x = 28 - 4t$. $x > y > 0$ és egész, ha $t = 1$, $t = 2$ vagy $t = 3$. Innen már adódik a megoldás.