

1. Az egyenletnek $x = 1$ és $x = \frac{-1}{3}$ kivételével minden valós számra van értelme. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a $(3x+1)(x-1)$ kifejezéssel, majd rendezzük az egyenletet. Az így kapott $17x^2 + 5x - 22 = 0$ egyenlet $x_1 = 1$ gyöke az adott egyenletnek nem megoldása, míg az $x_2 = \frac{-22}{17}$ az adott egyenlet egyetlen megoldása.

2. Alkalmazhatjuk a $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, illetve a $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ azonosságokat. Ekkor az adott kifejezés

$$\sqrt{(2\cos^2\alpha - 3)^2} + \sqrt{(2\sin^2\alpha - 3)^2} = |2\cos^2\alpha - 3| + |2\sin^2\alpha - 3|$$

alakban írható. Mivel $2\cos^2\alpha - 3 < 0$ és $2\sin^2\alpha - 3 < 0$, ezért az adott kifejezés

$$(3 - 2\cos^2\alpha) + (3 - 2\sin^2\alpha) = 4.$$

A kifejezés értéke minden valós α esetén 4.

3. A rendezéssel kapott $x^2 + (5-m)x + 4 > 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, azaz $D = (5-m)^2 - 16 < 0$. Ez $1 < m < 9$ esetén igaz.

4. Legyen a B pont ordinátája h , azaz $B(0, h)$. Az $\vec{AB}(6, h)$ és a $\vec{CB}(-1, h+1)$ merőleges vektorok, tehát skaláris szorzatuk 0.

$$-6 + h(h+1) = 0, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = -3.$$

Ha $B_1(0; 2)$, akkor $D_1(-5; -3)$, ha $B_2(0; -3)$, akkor $D_2(-5; 2)$.

5. A feltétel szerint $5a_n = S_{n-1}$, azaz

$$5 \cdot (12 + (n-1)(-2)) = \frac{n-1}{2}(24 + (n-2)(-2)),$$

ahonnan

$$n^2 - 25n + 84 = 0, \quad n = 4 \quad \text{vagy} \quad n = 21.$$

Így $a_4 = 6$, és ekkor valóban $S_3 = 30 = 5 \cdot 6$ vagy $a_{21} = -28$, és ekkor $S_{20} = -140 = 5 \cdot (-28)$.

6. a) Ha a havi kamatláb p , akkor

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = 1,3, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[12]{1,3} = 1,022104, \quad p = 2,21.$$

b) Az első hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000 \cdot q^{24}$, a második hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000 \cdot q^{23}$, ..., a 18. hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000 \cdot q^7$.

A 24. hónap végén összesen

$$2000 \cdot q^{24} + 2000 \cdot q^{23} + \dots + 2000 \cdot q^7 = 2000 \cdot q^7 \cdot \frac{q^{18} - 1}{q - 1},$$

azaz 50847 forintunk lesz.

7. A $\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}x - 1}{1 + \operatorname{tg}x}$ és a $\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2x}$ azonosságok alkalmazásával az egyenlet értelmezési tartománya

$(x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z})$ szűkül, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ -vel, $k \in \mathbb{Z}$.

Ha $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, akkor mindkét oldal helyettesítési értéke 1, így ezek megoldások. Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, akkor a kapott

$$\frac{\operatorname{tg}x - 1}{\operatorname{tg}x + 1} = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2x} + 1$$

egyenletnek nincs megoldása.

Az egyenlet megoldásai az $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ számok. Az egyenlet más módon is megoldható. Hogyan?

8. Mivel $x > 0, y > 0$ és $x + y = 1$, ezért

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad 1 \geq 2\sqrt{xy}, \quad 1 \geq 4xy, \quad \frac{1}{2} \geq 2xy, \quad \frac{1}{xy} \geq 4, \quad \frac{1}{x^2y^2} \geq 16$$

és

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1 - 2xy \geq \frac{1}{2}.$$

Ezek alkalmazásával

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + y^2 + 4 + \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} \geq \frac{1}{2} + 4 + 16 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}.$$

A két kifejezés akkor egyenlő, ha $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$, azaz ha $y = \frac{1}{x}$.