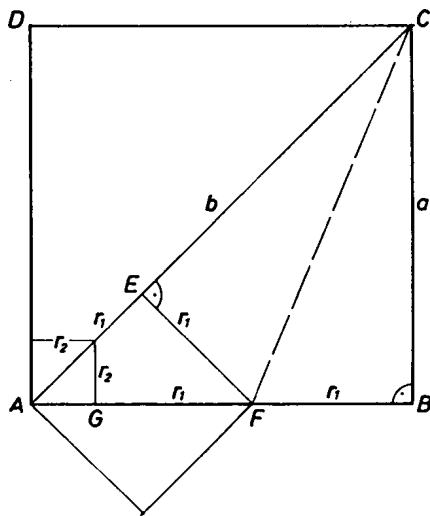


1. Geometriai megközelítés

Az irracionális szám a pitagoreusok felfedezése. A problémához geometriai úton jutottak el. Egy szakasz mérőszámának megállapítására bármely nála nem nagyobb hosszegység választható, amely valahányszor ráfér maradék nélkül. Kérdés, hogy bármely két szakaszhhoz létezik-e olyan hosszegység, amellyel mindkettő mérhető.

Két szakasz esetén egy közös mértéket úgy kaphatunk meg, hogy a kisebb szakaszt felmérjük a nagyobb szakaszra, és ha a kisebb szakasz többszöröse maradék nélkül rámérhető a nagyobb szakaszra, akkor ez egy közös mérték, ha nem, akkor a maradékot felmérjük a kisebb szakaszra – hasonlóan, mint előbb. Az eljárást tovább folytatva az utolsó nem nulla maradék lesz egy közös mérték. Előfordulhat azonban, hogy az előző eljárás soha nem ér véget. Ekkor a görögök azt mondták, hogy a két szakasz összemérhetetlen. Ha a két szakasz közül az egyiknek van mérőszáma, akkor a másiké arrheton (kimondhatatlan) szám; irracionális szám. A négyzet oldala és átlója ilyen, összemérhetetlen.



Legyen a négyzet oldala a , a négyzet átlója b . A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $b < 2a$, továbbá látható, hogy $b > a$. Tehát

$$(1) \quad b = a + r_1.$$

Állítsunk merőlegest az átlóra E -ben, ahol $\overline{EC} = a$. Az $EFC\Delta$ és az $FBC\Delta$ egybevágóak – két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög megegyezik. Így $\overline{EF} = \overline{FB}$. Az $EFA\Delta$ 45° -os, ebből következik, hogy $r_1 = \overline{EF} = \overline{FB}$. Most mérjük fel r_1 -et $\overline{AF}$ -re F -ből. Ezzel a négyzet oldalát az átlójára mérjük fel. Az *ábráról* jól látható, hogy

$$(2) \quad a = 2r_1 + r_2.$$

Ha az eljárást folytatjuk – G -ben állítva merőlegest, azt tapasztaljuk, hogy következő lépésként ismét egy négyzet oldalát mérjük fel átlójára. Az eljárás ezért soha nem ér véget.

Az is jól látható, hogy a lépések ismétlődnek, így

$$(3) \quad r_1 = 2r_2 + r_3,$$

általánosan

$$r_n = 2r_{n+1} + r_{n+2}.$$

Azt tudjuk, hogy a maradékok $-(r_i)$ – szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ez az algoritmus következménye. Az is könnyen belátható, hogy a maradékok lassan „elfogynak”, a maradékokból álló (r_i) sorozat határértéke nulla. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy az (r_i) sorozatnak végtelen sok eleme nagyobb, mint ε_0 . Azt tudjuk, hogy $b = a + r_1 = a + 2r_2 + r_3 = a + 2r_2 + 2r_4 + r_5$, és az eljárást folytatva b felírható a páros indexű maradékok segítségével:

$$b = a + 2(r_2 + r_4 + r_6 + \dots + r_{2i} + \dots).$$

Hasonlóan $b = r_1 + 2(r_1 + r_3 + \dots + r_{2i+1} + \dots)$ a páratlan indexű maradékokkal. Összeadva e két összefüggést kapjuk, hogy $2b = a + r_1 + 2(r_1 + r_2 + r_3 + \dots)$, ebből pedig következik, hogy $2b > 2(r_1 + r_2 + r_3 + \dots)$, azaz $b > \sum_{i=1}^{\infty} r_i$.

Mivel végtelen sok ε_0 -nál nagyobb maradék van, ezért $\left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon_0} \right\rceil + 1\right) = n$ darab ε_0 -nál nagyobb maradék is van.

Tehát

$$b > \sum_{i=1}^{\infty} r_i > \sum_{\substack{k=1 \\ r_{1k} > \varepsilon_0 > 0}}^n r_{1k} > \left(\frac{b}{\varepsilon_0} + 1\right) \varepsilon_0 > b.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a maradékokból álló sorozat nullához tart.

Vegyük észre, hogy ha fel tudnánk b -t a és r törtrészei segítségével írni úgy, hogy az összeg a maradékok közül egy lehetőleg minél kisebb tagot tartalmazzon, akkor $a = 1$ (egységnyi hosszúságú szakasz) választása esetén $b = \sqrt{2}$ értékét tetszőleges pontossággal meghatározhatnánk.

A (2) összefüggésből $r_1 = \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}$, ezt visszaírva (1)-be $b = a + \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}$ adódik. (3)-ból $\frac{r_1 - r_3}{2} = r_2$, és mivel $r_1 = \frac{a - r_2}{2}$, így $\frac{\frac{a - r_2}{2} - r_3}{2} = r_2$, azaz $\frac{a - 2r_3}{5} = r_2$. Ha ezt beírjuk a b -re kapott utolsó egyenletbe, $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{r_5}{5}$ adódik. Mivel $\frac{r_2 - r_4}{2} = r_3$, így $\frac{\frac{a - 2r_3}{5} - r_4}{2} = r_3$, tehát $\frac{a - 5r_4}{12} = r_3$. Ezt visszaírva a b -re kapott utolsó egyenletbe, kapjuk:

$$b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{r_4}{12}.$$

Hasonlóan kapjuk: $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{r_5}{29}$.

$a = 1$ esetén $b = \sqrt{2} \approx 1,41437$ adódik az előző összefüggésből.

Az eljárást folytatva $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{a}{2030} - \frac{r_6}{70}$ adódik, és $a = 1$ esetén $b = \sqrt{2} \approx 1,4142$.

Legyen $b(1) = a + \frac{r_1}{c_1}$ az összeg első, $b(2) = a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{r_2}{c_2}$ a második alakja. Legyen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $\dots$, $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ ($i > 1$ esetén). Azt állítjuk, hogy – minden n -re – b

$$(4) \quad a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{a}{c_2 c_3} + \dots + (-1)^n \frac{a}{c_{n-1} c_n} + (-1)^{n+1} \frac{r_n}{c_n}$$

alakban írható.

Először belátjuk, hogy $r_i = \frac{a - c_i r_{i+1}}{c_{i+1}}$.

Bizonyítás teljes indukcióval:

$$i = 1 \text{ esetén } r_1 = \frac{a - r_2}{2}, \quad i = 2 \text{ esetén } r_2 = \frac{a - 2r_3}{5}.$$

Tegyük föl, hogy n -re teljesül, hogy $r_n = \frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}}$. Ezt az $r_{n+1} = \frac{r_n - r_{n+2}}{2}$ összefüggésbe beírva

$$\frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{c_{n+1}} r_{n+2} = 2r_{n+1}$$

adódik, amit rendezve a kívánt

$$\frac{a - c_{n+1} r_{n+2}}{c_{n+2}} = r_{n+1}$$

alakra hozhatunk $c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$ felhasználásával.

Visszatérve (4)-re, azt is teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$n = 1\text{-re } b = a + \frac{r_1}{c_1} = a + r_1; n = 2\text{-re } b = a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{r_2}{c_2} = a + \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}.$$

Tegyük föl, hogy valamilyen n -re $b = a + \dots + (-1)^{n+1} \frac{r_n}{c_n}$; ekkor

$$\begin{aligned} b &= a + \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}} \right) \cdot \frac{1}{c_n} = \\ &= a + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a}{c_n \cdot c_{n+1}} + (-1)^{n+2} \frac{r_{n+1}}{c_{n+1}}. \end{aligned}$$

Mivel a maradékokból álló sorozat nullához tart, ezért

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{c_1 c_2} - \frac{1}{c_2 c_3} + \dots + (-1)^i \frac{1}{c_{i-1} c_i} \right) = \sqrt{2}.$$

Az előző összeg segítségével:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} - \frac{1}{348} + \frac{1}{2030} + \dots$$

2. A $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurzió

A (c_i) sorozat elemeit a $c_i = c_{i-2} + 2c_{i-1}$ rekurziós formula adja meg, ha $i > 2$, c_1 és c_2 pedig legyen 0, illetve 1. A Fibonacci-számokhoz hasonlóan lehetőség van a sorozat elemeit explicite is megadni, azaz i ismeretében a c_i -t meghatározni.

1. módszer: A sorozat elemeit két mértani sorozat összegeként írjuk fel. Olyan mértani sorozatokat tekintünk, amelyek maguk is kielégítik a $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurziót.

Legyen $c_i = q^i$, $q \neq 0$. Ekkor $q^i = 2q^{i-1} + q^{i-2}$ minden $i \geq 2$ esetén, ami

q^{i-2} -vel való osztás miatt ekvivalens a $q^2 = 1 + 2q$ feltétellel.

$q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ kielégítik az utóbbi egyenletet.

Legyen $S_1 = (1, q_1, q_1^2, q_1^3, \dots)$ és $S_2 = (1, q_2, q_2^2, q_2^3, \dots)$. A sorozatunkat $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ alakban keressük:

$$(0, 1, 2, 5, \dots) = \lambda_1 (1, q_1, q_1^2, q_1^3, \dots) + \lambda_2 (1, q_2, q_2^2, q_2^3, \dots).$$

Az egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elégséges az első 2 tag egyenlősége, hiszen mindkét oldal kielégíti a $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurziót. Azaz $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ és $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 1$ -nek teljesülnie kell.

Az egyenletrendszer megoldva $\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ adódik. Így

$$\begin{aligned} (0, 1, 2, 5, \dots) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1, 1 + \sqrt{2}, (1 + \sqrt{2})^2, (1 + \sqrt{2})^3, \dots \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1, 1 - \sqrt{2}, (1 - \sqrt{2})^2, (1 - \sqrt{2})^3, \dots), \quad \text{vagyis} \\ c_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right). \end{aligned}$$

2. módszer: Tekintsük az $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ún. hatványsort. Ez „elég kis” x értékekre konvergens, és belátható,

hogy hasonlóan számolhatunk vele, mint véges összegekkel. A $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ tulajdonság felhasználásával tekintsük $(x^2 + 2x - 1) \cdot F(x)$ -et:

$$(-) \quad F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$(+) \quad 2x \cdot F(x) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} c_{i-1} x^i$$

$$(+) \quad x^2 \cdot F(x) = \sum_{i=2}^{\infty} c_{i-2} x^i$$

Innen

$$\sum_{i=2}^{\infty} \underbrace{(-c_i + 2c_{i-1} + c_{i-2})}_0 x^i + \underbrace{2c_0 x}_0 - \underbrace{c_0}_0 - \underbrace{c_1 x}_{-x} = (2x + x^2 - 1)F(x).$$

Az előző összefüggésből

$$F(x) = \frac{-x}{x^2 + 2x - 1} = -x \left(\frac{1}{(x - (-1 - \sqrt{2})) \cdot (x - (-1 + \sqrt{2}))} \right).$$

Az $\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$ tört ún. parciális törtekre bontással felírható

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

alakban, ahol A és B értékét közös nevezőre hozás után a megfelelő együtthatók összehasonlításával kaphatjuk meg. Ezt végigszámolva

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x - (-1 - \sqrt{2})} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x - (-1 + \sqrt{2})} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2})}{x - (-1 - \sqrt{2})} + \\
 &\quad + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1 + \sqrt{2}) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1 + \sqrt{2})}{x - (-1 + \sqrt{2})} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - (-1 - \sqrt{2})) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2})}{x - (-1 - \sqrt{2})} + \\
 &\quad + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - (-1 + \sqrt{2})) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1 + \sqrt{2})}{x - (-1 + \sqrt{2})} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-1 - \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{x - (-1 - \sqrt{2})} + \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (-1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{x - (-1 + \sqrt{2})}.
 \end{aligned}$$

Végül $\frac{1}{x - \alpha}$ végtelen mértani sorba fejthető:

$$\frac{1}{x - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} = (-1)(\alpha^{-1}) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\alpha^i}.$$

Így

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^i \cdot x^i + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \sqrt{2})^i \cdot x^i = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(1 + \sqrt{2})^i - (1 - \sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}} \right) \cdot x^i, \quad \text{vagyis} \quad c_i = \frac{(1 + \sqrt{2})^i - (1 - \sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

3. Lánc törtek

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_N}}}}}$$

A fenti kifejezést véges lánc törtnak nevezzük. Az a_i -k tetszőleges valós számok lehetnek. Általánosabb tárgyalás esetén a „számlálókban” az 1-esek helyett más valós számok is állhatnak, azonban itt ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

A fenti lánc törteket rövidebben $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$ -nel fogjuk jelölni.

Legyen $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, ha $n > 1$;

$q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ és $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, ha $n > 1$.

Tudjuk, hogy $[a_0] = \frac{a_0}{1}$; $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$ és teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $[a_0, a_1, \dots, a_n] =$

$$\frac{p_n}{q_n}.$$

A következő állításunk az, hogy $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$. Mivel

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \underbrace{(a_n p_{n-1} + p_{n-2})}_{p_n} q_{n-1} - p_{n-1} \underbrace{(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}_{q_n} = - (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}).$$

A következő lépésben p_{n-1} és q_{n-1} -et beírva, és a behelyettesítéseket tovább folytatva kapjuk a fenti összefüggést. Az előző állításnak közvetlen következménye, hogy

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n},$$

azaz $[a_0, a_1, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_{n-1}] = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$; ebből viszont következik, hogy az $[a_0, \dots, a_N]$ lánc tört értékét

$a_0 + \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{1}{q_{n-1} q_n}$ alakban írhatjuk fel. Ami nem más, mint az 1. részben a $\sqrt{2}$ -re felírt közelítő összegek általános alakja az utolsó – ismeretlen, egyre csökkenő maradék tagot tartalmazó – tag nélkül, $a_0 = 1$, $a_n = 2$ ($n > 0$ esetén), és $q_i = c_{i+1}$ -et írva a fenti összefüggésbe. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{2}$ közelítő értékét egyszerűen felírhatjuk $[1, 2, 2, \dots, 2]$ lánc törtként, s minél tovább folytatjuk a felírást, annál pontosabb értéket kapunk $\sqrt{2}$ -re. Azt is mondhatjuk, hogy az

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

végtesen periodikus lánc tört értéke $\sqrt{2}$.

Közvetlenül is bizonyíthatjuk, hogy az $[1, 2, 2, 2, \dots]$ végtesen lánc tört értéke $\sqrt{2}$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$, ahol $x_n = [a_0, \dots, a_n]$, esetünkben $a_0 = 1$, $a_n = 2$ (minden $n > 0$ -ra). A 2. részben vázolt módszerek egyikével felírhatjuk p_n és q_n explicit alakját. Mivel

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}, \quad \text{ahol} \quad p_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

és

$$q_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}},$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2} \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}.$$

$|1 + \sqrt{2}| < 1$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{2})^n = 0$, ebből viszont következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$. p_n és q_n értékeinek pontos meghatározása után $\sqrt{2}$ értékére racionális közelítéseket kapunk, váltakozva alulról és felülről.

$p_0 = 1$	$q_0 = 1$	$\frac{p_0}{q_0} = 1 = 1$
$p_1 = 3$	$q_1 = 2$	$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1,5$
$p_2 = 7$	$q_2 = 5$	$\frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5} = 1,4$
$p_3 = 17$	$q_3 = 12$	$\frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12} \approx 1,416$
$p_4 = 41$	$q_4 = 29$	$\frac{p_4}{q_4} = \frac{41}{29} \approx 1,413$

Egy másik végtesen és periodikus lánc tört az $[1, 1, 1, \dots]$. Egyszerűen kapjuk, hogy $\frac{p_i}{q_i} = \frac{f_{i+2}}{f_{i+1}}$, ahol f_i a Fibonacci sorozat $(i+1)$ -edik eleme ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$, $\forall i > 1$). Ha p_i -t és q_i -t explicit felírjuk a 2. részben vázolt módszerek egyikével, azt kapjuk meg, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ami nem más, mint az aranymetszés arányszáma: ha egy $a + b$ hosszúságú szakaszra

$$(a + b) : b = b : a, \text{ akkor } b : a = \frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Néhány további irracionális szám láncörtalakja:

$$\begin{aligned}\pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots] \\ e &= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots] \\ \sqrt{3} &= [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]\end{aligned}$$

A fenti példákban szereplő, és $\sqrt{2}$ -re, ill. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ -re kapott végtelen láncörtöket is *egyszerű* láncörtöknek nevezzük, mivel a láncört alakokban szereplő a_i -k egész számok. Bizonyítható, hogy minden valós számnak létezik egyszerű láncört alakja, és pontosan akkor racionális egy szám, ha az egyszerű láncört-alakja véges, ill. pontosan akkor irracionális, ha egyszerű láncört-alakja végtelen.

Az euklideszi algoritmushoz hasonló láncört algoritmus segítségével elvileg bármely valós számnak felírhatjuk az egyszerű láncört alakját. Legyen x valós szám, és legyen $a_0 = [x]$ (x egész része). Így $x = a_0 + \xi_0$, ahol $0 \leq \xi_0 < 1$. Ha $\xi_0 \neq 0$, akkor legyen $\frac{1}{\xi_0} = a'_1$, $[a'_1] = a_1 \geq 1$. Így $a'_1 = a_1 + \xi_1$, ahol $0 \leq \xi_1 < 1$. Az algoritmust folytatva: $a'_n = \frac{1}{\xi_{n-1}}$ és

$$x = [a_0, a'_1] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{a'_2} \right] = [a_0, a_1, a'_2] = [a_0, a_1, a_2, a'_3] = \dots$$

Például:

$$\frac{3}{7} = 0 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [0, 2, 3].$$

Noha $\sqrt{2}$ végtelen nem szakaszos tizedes tört, egyszerű láncört-alakja mégis azt mutatja, hogy van benne harmónia. Már a XVIII. században megmutatták, hogy a láncört kifejtésben a periodikusság az $a + \sqrt{b}$ alakú irracionális számokat jellemzi, ahol a és b racionális. (Ilyen tehát pl. $\sqrt{3}$ és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ láncört-alakja is.)