

Feladat. Szerkeszthető-e a háromszög, ha a szögfelező szakaszainak hossza

a) 1, 2, 2 egység?

b) 1, 3, 3 egység?

Szemléletesen nyilvánvaló, hogy ha a háromszög két szögfelező szakasza egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú. Ennek első bizonyítása Steinertől származik, ezért a szakirodalomban *Lehmus – Steiner-tétel*ként szerepel. (Részletesebben l. például: *Coxeter–Greitzer: Az újra felfedezett geometria*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1977. 33–36. o.)¹

1993-11-346-1.eps

1. ábra

a) Tegyük fel, hogy szerkeszthető a kívánt ABC háromszög, akkor a Lehmus – Steiner-tétel értelmében a háromszög egyenlő szárú, és a magassága 1 egység. Jelölje az alapot BC , a szárakat b , az alapon nyugvó szögeket 2ε , $BB_1 = CC_1 = 2$ egység (1. ábra). A külső szög tétel értelmében $AB_1B \sphericalangle = 3\varepsilon$, továbbá, $BAC \sphericalangle = \pi - 4\varepsilon$. A derékszögű háromszögből

$$(1) \quad b \sin 2\varepsilon = 1.$$

Az ABB_1 háromszögben a szinusztételből

$$\frac{2}{b} = \frac{\sin 4\varepsilon}{\sin 3\varepsilon}.$$

(1)-ből a b -t behelyettesítve, a megszerkeszthető, 0 és $\pi/4$ közé eső ε kielégíti a

$$2 \sin 2\varepsilon \sin 3\varepsilon = \sin 4\varepsilon.$$

egyenletet. Ezzel ekvivalensek a következő állítások:

$$\sin 3\varepsilon = \cos 2\varepsilon$$

$$\sin 3\varepsilon = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon \right)$$

$$3\varepsilon = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon + 2\pi k$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k$$

$$\text{vagy} \quad 3\varepsilon + \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon = \pi + 2\pi l \quad k, l \in \mathbf{Z}$$

$$\text{vagy} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + 2\pi l.$$

$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ miatt az egyetlen megoldás $\varepsilon = \frac{\pi}{10}$.

Beláttuk tehát:

I. Ha szerkeszthető az 1, 2, 2, szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög, akkor szerkeszthető a BB_1B_2 derékszögű háromszög, amelynek átfogója $BB_1 = 2$, és amelyben $B_1BB_2 \sphericalangle = \varepsilon = 18^\circ$.

Kimutatjuk, hogy ennek megfordítása is igaz:

II. Ha szerkeszthető a BB_1B_2 derékszögű háromszög, amelynek átfogója $BB_1 = 2$, és $\varepsilon = 18^\circ$, akkor szerkeszthető az 1, 2, 2 szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög is.

1993-11-347-1.eps

2. ábra

Tegyük fel, hogy szerkeszthető a mondott BB_1B_2 derékszögű háromszög, akkor tükrözzük a BB_2 félegyenest a BB_1 -re, majd szerkesszünk a B_1 -en átmenő, a BB_2 -vel 36° -os szöget bezáró BA' -vel nem párhuzamos –egyenest (l. a 2. ábra jelöléseit). Ily módon előáll az $A'BC'$ egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárakhoz tartozó szögfelezőszakaszok 2 egység hosszúak. Kérdés: a háromszög m magassága 1 egység-e? A szögfüggvények egyszerű alkalmazásával

$$BC' = BB_2 + B_2C' = 2 \cos 18^\circ + \frac{2 \sin 18^\circ}{\operatorname{tg} 36^\circ},$$

$$BA_1 = \frac{1}{2}BC',$$

$$(2) \quad m = BA_1 \operatorname{tg} 36^\circ = \operatorname{tg} 36^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ.$$

¹ Ugyanakkor megjegyzendő, hogy két külső szögfelező szakasz egyenlőségéből általában nem következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. Szerk.

A 18° és 36° szögfüggvényeinek pontos értékét egyszerűen meghatározhatjuk:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

ezeket (2)-be helyettesítve m -re tényleg 1-et kapunk.

Ezzel beláttuk, hogy a II. állítás is igaz. Közismert, hogy a 18° -os szög megszekeszthető, tehát a II. előtagja igaz. Ebből következően a II. utótagja is igaz, azaz a feladat kérdésére igenlő a válasz.

b) Az a) alatti megoldás gondolatmenete az ABC egyenlő szárú háromszög alapszögét 2φ -vel jelölve a $\sin 3\varepsilon = \cos 2\varepsilon$ helyett a

$$3 \sin 3\varphi = 2 \cos 2\varphi$$

egyenletre vezet. Ennek egyszerű megoldására alig számíthatunk. Alkalmazzuk $\sin 3\varphi$ -re az addíciós tételket, majd olyan lépések kínálkoznak, amelyek során a φ -nek csak a szinusa marad meg:

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi(3 \sin \varphi - 2) + 3 \cos \varphi \sin 2\varphi &= 0, \\ (3) \quad 12 \sin^3 \varphi - 4 \sin^2 \varphi - 9 \sin \varphi + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Eddigi eredményünk: ha szerkeszthető az 1, 3, 3 szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög, akkor az egyenlő szárú, továbbá alapszöge felének szinusa szerkeszthető, és gyöke a

$$(4) \quad 12x^3 - 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

egész együtthatós harmadfokú egyenletnek.

Keressük meg a (4) racionális gyökeit!

Tegyük fel, hogy p/q ($p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^+$) megoldása a (4)-nek, akkor az ismert tétel szerint $p|2, q|12$. Ebből az adódik, hogy p/q csak a következő 16 racionális szám valamelyike lehet: 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$, $1/12$, 2, $2/3$, valamint ezek ellentettjei. A (4) bal oldala által meghatározott f polinomfüggvény deriváltja két szélsőérték helyet szolgáltat: $-0,40109$; $0,62331$. Ezeket, továbbá az $f(-1) < 0$, $f(-1/2) > 0$, $f(0) > 0$, $f(1/2) < 0$, $f(1) > 0$ megállapításokat felhasználva felvázolhatjuk f grafikonját és a folytonos függvényekre vonatkozó tételek alapján három intervallumot kaphatunk a (4) gyökeire:

$$\left(-1; -\frac{1}{2}\right), \quad \left(0; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

A 16 lehetséges racionális gyök közül a következők esnek ezekbe az intervallumokba:

$$-2/3; \quad 1/3; \quad 1/4; \quad 1/6; \quad 1/12; \quad 2/3.$$

Behelyettesítve őket, egyik sem bizonyul gyöknek, és a gyökökre ezeket a szűkebb intervallumokat kapjuk:

$$(5) \quad \left(-1; -\frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{2}{3}; 1\right).$$

A szerkeszthetőség elméletének egyik ismert tétele azt mondja, hogy ha a racionális együtthatós harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor az egyenlet egyik gyöke sem szerkeszthető meg (l. KöMal 1985. évi 8–9. szám, 337–341. o.).

Gondolatmenetünk szerint $\sin \varphi$ gyöke a (4) egyenletnek, amelynek nincs racionális gyöke, ezért $\sin \varphi$ nem szerkeszthető meg. Ez ellentmond annak a megállapításunknak, hogy $\sin \varphi$ szerkeszthető, feltéve, hogy a kívánt háromszög szerkeszthető.

A feladat kérdésére tehát nemleges választ kaptunk.

Megjegyzés: A (4) egyenletet kielégítő $\sin \varphi$ -re a $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ korlátozás mellett az (5) alatti második és harmadik intervallum egyaránt szóba jöhet, de a $2/3$ és 1 közti szinusz érték 41° -nál nagyobb szöget ad φ -re. Az ebből nyerhető 82° , 82° , 16° szögű vagy még „laposabb” háromszög nyilvánvalóan nem lehet megoldás. A feltételeknek egyetlen háromszög felel meg: a $\sin \varphi$ ($1/6; 1/3$) intervallumbeli értékéből adódóan a durván 9° és 15° közé esik, de a (4)-re alkalmazott közelítő módszerekkel tetszőleges pontosság elérhető.