

1. Nevezzük  $n$  adott pozitív szám különös közepének a számok négyzetösszegének és összegének hányadosát, harmadik hatványközépüknek pedig köbeik számtani közepének a köbgyökét. Döntsük el  $n = 2$  esetén, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül.

- a) A különös közép sohasem kisebb a harmadik hatványközépnél.
  - b) A különös közép sohasem nagyobb a harmadik hatványközépnél.
  - c) A különös közép a számok választásától függően lehet nagyobb és kisebb is a harmadik hatványközépnél.
- Melyik állítás igaz  $n = 3$  esetén?

**I. megoldás.** Legyenek az adott pozitív számok  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Tudjuk, hogy két pozitív szám közül a köbe a nagyobbiknak lesz nagyobb, és hasonló áll a pozitív számszorosokra is. A két közép különbsége tehát ugyanolyan előjelű, mint a köbeik különbségének  $n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3$ -szorosa.

Erre a kifejezésre  $n = 2$  esetén egyszerű átalakításokkal a következő azonosságot nyerjük:

$$2(a_1^2 + a_2^2)^3 - (a_1 + a_2)^3(a_1^3 + a_2^3) = (a_1 + a_2)^3(a_1^3 - a_2^3).$$

Ha tehát  $a_1 = a_2$ , akkor a különbség 0, a két közép egyenlő, különben a jobb oldal két tényezője egyező előjelű, így szorzatuk pozitív; a különös közép tehát nagyobb a harmadik hatványközépnél. Eszerint két szám esetén az a) állítás igaz.

Három szám esetén viszont a c) állítás az igaz. Ennek igazolására elég megadni egyrészt három olyan számot, amelyek különös közepe nagyobb harmadik hatványközépükénél, másrészt három olyant, amelyekre a különös közép a kisebb. Az előbbi tulajdonságú az 1, 1, 2 hármas. Erre

$$3(1^2 + 1^2 + 2^2)^3 = 648, \quad (1 + 1 + 2)^3(1^3 + 1^3 + 2^3) = 640.$$

Az utóbbira példa a 2, 2, 3 hármas. Erre

$$3(2^2 + 2^2 + 3^2)^3 = 14739, \quad (2 + 2 + 3)^3(2^3 + 2^3 + 3^3) = 14749.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

*Megjegyzés.* Volt, aki három olyan számtól remélte, hogy a harmadik hatványközépük lesz a nagyobb, amelyek közt kicsi, egyenlő különbség van. Ez azonban nem következik be. Ha a három szám  $a - b$ ,  $a$ ,  $a + b$ , ahol  $0 < b < a$ , akkor a különös közép

$$\frac{(a - b)^2 + a^2 + (a + b)^2}{3a} = a + \frac{2b^2}{3a},$$

a harmadik hatványközép köbe pedig

$$\frac{(a - b)^3 + a^3 + (a + b)^3}{3} = a^3 + 2ab^2.$$

Mivel az előbbi érték köbe ezzel a két taggal kezdődik, és ehhez további két pozitív tag járul, így az ilyen számhármaknak mindig a különös közepe nagyobb.

**II. megoldás.** Jegyezzük meg először, hogy ha a közepek nagyságviszonyát vizsgáljuk, akkor megszorozhatjuk mindegyik számot ugyanazzal a pozitív számmal, hiszen ekkor a két közép is ezzel a számmal szorozódik meg, nagyságviszonyuk tehát nem változik. Így feltehetjük, hogy a számok számtani közepe 1, mert ha nem így volna, akkor eloszthatjuk mindegyiket a számtani középpel.

Vizsgáljuk a két közép viszonyát olyan számokra, amelyek közül  $n - 1$  egyenlő és kisebb mint 1, tehát  $1 - c$ , ahol  $0 < c < 1$ , az  $n$ -edik pedig  $1 + (n - 1)c$ . Az első megoldás megjegyzésének megfelelően elég a közepek köbének a különbségét vizsgálni. Ez

$$\begin{aligned} & \left( \frac{n + n(n - 1)c^2}{n} \right)^3 - \frac{n + 3((n - 1) + (n - 1)^2)c^2 + (-(n - 1) + (n - 1)^3)c^3}{n} = \\ & = 1 + 3(n - 1)c^2 + 3(n - 1)^2c^4 + (n - 1)^3c^6 - 1 - 3(n - 1)c^2 - (n - 1)(n - 2)c^3 = \\ & = -(n - 1)c^3(n - 2 - 3(n - 1)c - (n - 1)^2c^3). \end{aligned}$$

Két szám ( $n = 2$ ) esetén ez mindig pozitív, és jegyezzük meg, hogy ekkor az általános esettel van dolgunk, miután nincsenek egyenlő számok. Ekkor tehát az a) állítás az igaz.

Pozitív a kifejezés 2-nél nagyobb  $n$ -re is, ha  $c$  elég nagy (de 1-nél kisebb), pl.  $c = \frac{2}{3}$ . Ha viszont  $c$  kicsi, pl.  $c = \frac{1}{4(n - 1)}$ , (és  $n \geq 3$ ), akkor a zárójelben levő kifejezés

$$n - \frac{11}{4} - \frac{1}{64(n - 1)} \geq n - \frac{353}{128} \geq \frac{384 - 353}{128} > 0.$$

Ekkor tehát a harmadik hatványközép a nagyobb.

Azt nyertük tehát, a feladatban feltettnél általánosabb kérdésre adva választ, hogy 2-nél több szám esetén mindig a c) állítás az igaz.

**Megjegyzések.** 1. A harmadik hatványközép lehet csupa különböző szám esetén is nagyobb a különös középénél. Három szám esetén pl. – kényelem kedvéért egész számokra szorítkozva – legyen két szám a 23 és a 25. Azt vehetjük észre, hogy a harmadik számot 29 és 36 közt választva a harmadik hatványközép lesz a nagyobb, viszont 28-at vagy 37-et választva már a különös közép a nagyobb.

2. Meglehető eredményt kapunk, ha azt vizsgáljuk, hogy három szám esetén a harmadik hatványközép és a különös közép hányadosa mekkora lehet. Ez a hányados a maximumát az 1, 1,  $\sqrt{2}$  hármásra (és az ezzel arányosakra) veszi fel; a maximum értéke mindössze

$$\sqrt[3]{\frac{24 + 17\sqrt{2}}{48}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{578}{576}} \right)} = 1,00028902.$$

**2. Tetszőleges pozitív egész  $k$ -ra legyen  $f_1(k)$  a tízes számrendszerben felírt  $k$  szám jegyei összegének a négyzete és  $n > 1$  esetén legyen  $f_n(k) = f_1(f_{n-1}(k))$ . Mennyi  $f_{1992}(2^{1991})$ ?**

**Megoldás.** A kérdésre annak alapján tudunk választ adni, hogy egyrészt a számjegyek számát határozzuk meg, másrészt a kérdezett szám maradékát, ha 9-cel osztjuk.

Jelöljük a  $2^{1991}$  számot  $K$ -val.

$$K = 8^{\frac{1991}{3}} < 10^{664}.$$

A  $K$  szám tehát legfeljebb 664 jegyű, s így jegyeinek az összege nem több mint  $664 \cdot 9$ , ami 6000-nél kisebb. Eszerint  $f_1(K) < 36 \cdot 10^6$ . Eddig a korlátig a 29 999 999 szám jegyeinek az összege a legnagyobb, 65. Így

$$f_2(K) \leq 4225.$$

Hasonlóan számolva

$$f_3(K) \leq (3 + 3 \cdot 9)^2 = 900.$$

Egy legfeljebb háromjegyű  $k$  számra  $f_1(k) \leq (3 \cdot 9)^2 = 729$ , tehát szintén legfeljebb háromjegyű. Így, ha  $n \geq 3$ , akkor  $f_n(K)$  legfeljebb háromjegyű.

Ismeretes, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege; továbbá két szám szorzatának a maradéka, ha 9-cel osztunk, ugyanannyi, mint a maradékaik szorzatáé, mivel  $(9r + s)(9t + u) = 9(9rt + ru + st) + su$ . Ezek alapján

$$K = 2^{6 \cdot 331 + 5} = 64^{331} \cdot 32 = (9 \cdot 7 + 1)^{331} (9 \cdot 3 + 5)$$

maradéka 5, s így ennyi a számjegyei összegének a maradéka is.  $f_1(K)$  maradéka tehát annyi, mint 25-é, azaz 7;  $f_2(K)$  maradéka annyi, mint 49-é, vagyis 4;  $f_3(K)$  maradéka annyi, mint 16-é, ami 7. Ennyi a maradéka a számjegyei összegének is, és a szám legfeljebb háromjegyű, így a számjegyek összege csak 7, 16 és 25 lehet.  $f_4(K)$  lehetséges értékei 49, 256 és 625.  $f_5(K)$  értéke már mind a három esetben ugyanaz: 169. Folytatva a számolást

$$f_6(K) = 256, \quad f_7(K) = 169, \quad f_8(K) = 256.$$

Világos, hogy innen periodikusan páros indexre 256-ot kapunk, páratlanra 169-et. A feladat kérdésére tehát a válasz

$$f_{1992}(2^{1991}) = 256.$$

**Megjegyzések.** 1. Természetesen más  $a$ -ra,  $e$ -re és  $n$ -re is meghatározható hasonlóan  $f_n(a^e)$ , és könnyen látható, hogy elég nagy  $n$ -re 169-en és 256-on kívül csak az 1 és a 81 fordul elő.

2. Számítógéppel meghatározható  $2^{1991}$  számjegyeinek az összege, ez 2669. Innen  $f_1(K) = 7123561$ ,  $f_2(K) = 625$ ,  $f_3(K) = 169$ ,  $f_4(K) = 256$ , és már innen ismétlődik periodikusan az utolsó két érték.

**3. Adott a síkban véges sok pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne legyen olyan félsík, amely a pontok közül pontosan hármat tartalmaz, és azok egyszínűek.**

**Megoldás.** Vegyük a pontthalmaz konvex burkát, azt a legkisebb sokszöget, amelyik az összes pontot tartalmazza. (Lásd az alábbi 1. megjegyzést). Ennek csúcsai az adott pontok közül valók, és a feltétel szerint az oldalszakaszok belsejére nem esik adott pont.

Egy olyan félsík, amelyikbe három adott pont esik, tartalmazza a pontok meghatározta háromszöget, így tartalmaz a konvex burok belsejében levő pontot. A határegyenesre tehát átmetszi a konvex burkot, ezért a félsík tartalmazza a konvex burok legalább egy csúcsát.

A burok belsejében lehetnek az adott pontok közül olyanok, amelyeket egy olyan félsík sem tartalmaz, amelyikbe csak három adott pont esik. Ezek színezése a feladat követelményének teljesülését nem befolyásolja. Ez adhatja azt a gondolatot, hogy az összes belső pontot fessük ugyanolyanra, mondjuk kékre.

## 1. ábra

A burok csúcsait ezután több lépésben színezzük ki. Első lépésben fessük az összeset pirosra. Ha most van három szomszédos csúcs,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , amelyek meghatározta háromszög nem tartalmaz további adott pontot, akkor  $B$  színét változtassuk kékre (1. ábra). Ha ezután is maradt ilyen csúcs-hármas, akkor ismételjük az eljárást. Ez véges számú lépésben befejeződik.

Megmutatjuk, hogy így megfelelő színezéshez jutunk. Jegyezzük meg, hogy nem keletkezik a konvex burkon két szomszédos kék csúcs, mert ha egy csúcsot kékre festünk, akkor a szomszédos csúcsok már nem lehetnek olyan háromszög középső csúcsai, amelyeknek mind a három csúcsa piros.

Ha egy felsík három csúcsot tartalmaz, akkor az azok meghatározta háromszög nem tartalmaz további adott pontot, tehát vagy a középső csúcs kék, a két szomszédja piros, vagy azért nem változtattuk meg a középső csúcs színét, mert a csúcsok nem voltak egyszínűek.

## 2. ábra

Ha két csúcsot tartalmaz a felsík, akkor tartalmaz a konvex burok belsejében lévő, tehát kék pontot, viszont a két csúcsnak legfeljebb az egyike lehet kék.

Ha végül a három pontot tartalmazó felsík egy csúcsot tartalmaz, akkor a határegyenese átmetszi az abból induló két oldalt (2. ábra). A tartalmazott csúcs és a két szomszédja tehát olyan háromszöget határoz meg, amelyik tartalmaz a burok belsejében levő (tehát kék) pontot, s így a csúcsot meghagytuk pirosnak. Ezzel állításunkat beláttuk.

*Megjegyzések.* 1. A sík egy véges ponthalmazának a konvex burkát megkaphatjuk például úgy, hogy választunk egy felsíkot, amelyik tartalmazza a ponthalmazt. Annak a határegyeneshöz legközelebbi (egyik) pontján át a határegyenessel párhuzamost húzunk, majd ezt forgatjuk a rajta levő, vagy ha több van, az egyik szélső adott pont körül úgy, hogy a ponthalmaz az egyik oldalán legyen, amíg újabb adott pont nem kerül rá. Ezután ekörül, illetőleg megint a szélső körül forgatjuk tovább az egyenest ugyanabban az irányban (3. ábra). Az eljárás véges számú lépésben befejeződik azzal, hogy visszajutunk az egyenes kezdő helyzetéhez. A forgásközéppontok a keresett konvex burok csúcsai.

## 3. ábra

## 4. ábra

2. A megoldásban leírt eljárást adta meg Boda Péter. Ez láthatóan általában nem egyértelmű, több megfelelő színezéshez is vezethet aszerint, hogy hogyan választjuk azokat a háromszögeket, amelyek középső csúcsát átszínezzük.

A feladat többi megoldói a következő eljárást adták. A belső pontok kékre festése után pirosra festjük a konvex burok egy csúcsát, ha az a szomszédos csúcsokkal olyan háromszöget alkot, amelyik tartalmaz a belsejében adott pontot. Végül az esetleg színezetlenül maradt csúcsok alkotta íveken egy irányba haladva a szomszédos piros csúcs utánit kékre festjük, és a következőket felváltva pirosra és kékre, míg a következő piros csúcsig nem érünk (4. ábra), a burok két szélső csúcsa lehet kék is, piros is.

A leírt színezés is kiadja ezt, ha egy irányba haladva mindig a legközelebbi háromszöget vesszük, amelyiknek a középső csúcsát át kell színezni. Ebből látható, hogy ez az eljárás is megfelelő.