

A KöMaL 1991. évi 6. számában közöltük az alábbi (pontversenyen kívüli) feladatot:

Négy azonos tömegű pontszerű testet azonos hosszúságú fonalak segítségével zárt, rombusz alakú láncba fűzünk, és a láncot egy ω szögsebességgel forgó légpárnás asztalra helyezzük:

a) Hogyan fog mozogni a négy test, ha kezdetben a forgó asztalhoz képest nyugalomban voltak, a rendszer tömegközéppontja a forgástengelyen helyezkedett el, és a rombusz egyik szöge α volt?

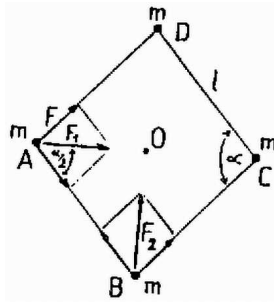
b) Hogyan mozog a rendszer, ha kezdetben a tömegközéppontja állt, és a forgó rendszerből nézve a két legközelebbi test egymás felé mozgott v_0 kezdősebességgel?

c) Írjuk le a rendszer legáltalánosabb mozgását mind az álló, mind pedig az ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerből nézve!

(Feltételezhetjük, hogy a súrlódás elhanyagolható, és a fonalak mindvégig feszesek. A mozgást csak a testek összeütközéséig kell követnünk.)

Megoldás. Legyen a testek tömege egyenként m , a fonalak hosszúsága l , a testeket jelöljük A , B , C és D betűkkel, tegyük fel továbbá, hogy az asztal vízszintes és $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a) A testekre ható gravitációs erő és az asztal tartóereje kiegyenlíti egymást, ezért mondhatjuk azt, hogy a testekre csak a fonálerők hatnak. A szimmetria miatt az F fonálerők egyenlőek, ezért egy kiszemelt testre ható fonálerők eredője mindig az O tömegközéppont felé mutat. Az eredő erő nagysága az A és C testek esetében: $F_1 = 2F \cos(\alpha/2)$; a B és D test esetében: $F_2 = 2F \sin(\alpha/2)$ (1. ábra).



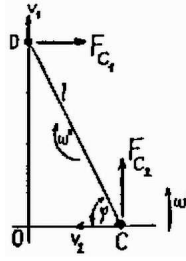
1. ábra

A kezdő pillanatban a testek sebessége a forgó rendszerben zérus, így nem lép fel a Coriolis-erő. Tegyük fel, hogy $2F \cos \frac{\alpha}{2} = F_1 > m \left(l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) \omega^2$. Ekkor az A és C testek az O tömegközéppont felé kezdenek gyorsulni, a másik két test – a fonalak feszességéből adódóan – nyilván a $\overrightarrow{BO}$, ill. a $\overrightarrow{DO}$ vektorokkal ellentétes irányban fog gyorsulni, aminek feltétele, hogy $F_2 = 2F \sin \frac{\alpha}{2} < m \left(l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) \omega^2$ legyen. A két egyenlőtlenségből a következő el-
lentmondásra jutunk: $\frac{1}{2} m l \omega^2 < F < \frac{1}{2} m l \omega^2$; ezért feltételezésünk rossz volt. Hasonlóan juthatunk ellentmondásra akkor is, ha feltételezzük, hogy $2F \cos \frac{\alpha}{2} = F_1 < m \left(l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) \omega^2$, ezért csak a következő eset valósulhat meg:

$F_1 = m \left(l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) \omega^2$ és $F_2 = m \left(l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) \omega^2$. A testek gyorsulása a forgó rendszerből nézve zérus; a testek tehát mindvégig mozdulatlanok maradnak. Példaként: az A test helykoordinátái az ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben: $x_A(t) = -l \cos(\alpha/2)$; $y_A(t) = 0$. Az álló koordináta-rendszerből (inerciarendszerből) nézve mindegyik test egyenletes körmozgást végez ω szögsebességgel az O tömegközéppont körül. Példaként az A test helykoordinátái:

$$x_A(t) = l \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos(\omega t + \pi); \quad y_A(t) = l \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin(\omega t + \pi).$$

b) Legyen α a rombusz kisebbik szöge; tehát $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. A feladat szövege szerint a fonalak mindvégig feszesek maradnak. Az O tömegközéppont – a rombusz egymásra merőleges átlóinak metszéspontja és egyben forgástengely – a mozgás során nem mozdul el. Képzeljük el a mozgást úgy, hogy a fonállal összekötött testek két egymásra merőleges, elhanyagolható tömegű, mereven összeerősített rúdra vannak felfűzve, és rájuk súrlódásmentesen csúszhatnak, rájuk merőlegesen erőt fejthetnek ki. A fonalak mindig feszesek és rombuszt alkotnak, ezért ezekkel a rudakkal kiegészítve a rendszer pontosan úgy fog mozogni, mint ahogy nélkülük mozogna. Tegyük fel, hogy a mozgás egy pillanatában a rudazat a testekkel együtt valamilyen ω' szögsebességgel forog az álló koordináta-rendszerhez képest, a rudakhoz képest a feszes fonalak $(\pm)\omega''$ szögsebességgel forognak és φ , illetve $90^\circ - \varphi$ szöget zárnak be a rudakkal. (A 2. ábrán egy kiszemelt fonál látható.)



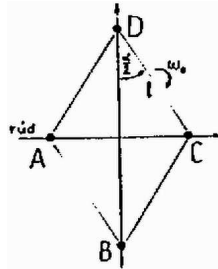
2. ábra

Természetesen a fonalak nemcsak forgó, hanem haladó mozgást is végeznek az ω' szögsebességgel forgó – rudakhoz rögzített – koordináta-rendszerben. Amint látni fogjuk, a megoldás szempontjából célszerű ezzel az ω'' szögsebességgel kifejezni a testek sebességét. Így a D test sebessége: $v_1 = l\omega'' \cos \varphi$, ugyanis ha a C testet rögzítenénk, akkor az ω'' pillanatnyi szögsebességű körmozgást végző D test sebességének OD irányú vetülete $l\omega'' \cos \varphi$ lenne. (S mivel a C pont mozgása OD -re merőleges, a D pont sebessége nem rögzített C esetén is v_1 kell legyen.) Hasonlóan a C test sebessége: $v_2 = l\omega'' \sin \varphi$.

Vajon állandó-e időben az ω' szögsebesség? A sugár irányban v sebességgel mozgó testek egy ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben $F_C = 2m\omega v$ tehetetlenségi erőt fejtenek ki, ez a Coriolis-erő. Nézzük meg, van-e ezeknek az erőknek forgatónyomatéka O pontra nézve! A C és D testek sugárirányú sebességéből származó F_{C1} és F_{C2} Coriolis-erők okozta, rudazatra ható forgatónyomatékok összege:

$$\begin{aligned} \sum M &= M_1 + M_2 = F_{C1} \cdot l \sin \varphi - F_{C2} \cdot l \cos \varphi = 2m\omega' v_1 \cdot l \sin \varphi - 2m\omega' v_2 \cdot l \cos \varphi = \\ &= 2ml\omega' (l\omega'' \sin \varphi \cdot l \cos \varphi - l\omega'' \sin \varphi \cdot l \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Az A és B testekre ható Coriolis-erők okozta forgatónyomatékok is kiejtik egymást, tehát a rudakra ható eredő forgatónyomaték ω' -től és ω'' -től (vagyis a testek sebességétől) függetlenül zérus. Ez azt jelenti, hogy a rudazat kezdeti ω szögsebessége a mozgás során nem változik meg, *állandó marad*: $\omega' \equiv \omega$.



3. ábra

A fent említett (ω'') „fonálszögsebesség” kezdetben ω_0 volt (3.ábra): $v_0 = l\omega_0 \sin \frac{\alpha}{2}$ -ből kapjuk: $\omega_0 = \frac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)}$. Tegyük fel, hogy a mozgás egy pillanatában a fonalak szögsebességének nagysága ω'' és a rombusz egyik szöge φ . Ekkor a rendszer összes mozgásienergiája (a zárójelben a kétféle forgásból származó sebességek négyzetei találhatók):

$$\begin{aligned} E_{\text{összes}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \omega^2 + l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \omega^2 + l^2 \omega''^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l^2 \omega''^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= ml^2 \cdot (\omega^2 + \omega''^2). \end{aligned}$$

Mivel mind az összenergia, mind ω állandó, ezért a fonalak ω'' szögsebessége is *állandó* (!), nagysága pedig: $\omega'' = \omega_0 = \frac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)}$.

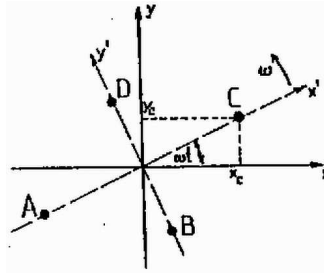
Ezek után már könnyen felírhatók a testek helykoordinátái az idő függvényében. Szemeljük ki például a C testet! Összeütközésig a rombusz felszöge az

$$\frac{\alpha'}{2}(t) = \frac{\alpha}{2} + \omega_0 t = \frac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)} t + \frac{\alpha}{2}$$

képlet szerint, a C test egyik koordinátája az ω szögsebességgel forgó (x' , y') koordináta-rendszerben

$$x'_C(t) = l \cdot \sin \left[\frac{\alpha'}{2}(t) \right] = l \cdot \sin \left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

képlet szerint változik, vagyis a test harmonikus rezgőmozgást végez ($y'_C(t) = 0$). (Ez hasonlóan megmutatható a többi testnél is.) Érdekes, hogy a rezgőmozgás ω_0 körfrekvenciája a v_0 kezdeti sebességtől függ, tehát változtatni lehet az értékét.



4. ábra

Az álló (x, y) koordináta-rendszerből nézve a testek egy ω szögsebességű egyenletes körmozgásból és egy harmonikus rezgőmozgásból összetett mozgást végeznek. A C test helykoordinátái tehát (4. ábra):

$$x_C(t) = x'_C(t) \cdot \cos(\omega t) = l \cdot \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\omega t);$$

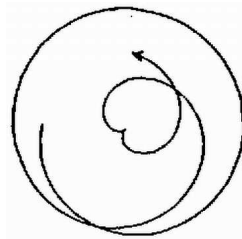
$$y_C(t) = x'_C(t) \cdot \sin(\omega t) = l \cdot \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin(\omega t).$$

A többi testnél is hasonlóan írhatók fel a helykoordináták.

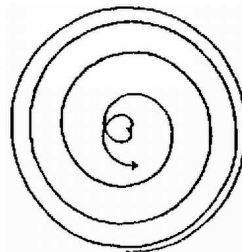
Az egymáshoz közeledő testek idővel összeütköznek. Ha az ütközést igen gyorsnak és tökéletesen rugalmasnak tételezzük fel, akkor a fenti képletek kis változtatással érvényesek maradnak a mozgás egészére – az ütközés(ek) után is:

$$x_C(t) = l \cdot \cos(\omega t) \cdot \left| \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})} + \frac{\alpha}{2}\right) \right|; \quad y_C(t) = l \cdot \sin(\omega t) \cdot \left| \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})} + \frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

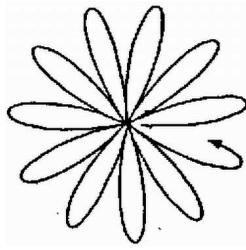
Egy kiszemelt test néhány lehetséges pályájának számítógéppel készített rajzát az 5–7. ábrák mutatják.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

Veres Gábor (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., III. o. t.)