1. Az egyenleteket átalakítva kapjuk, hogy

$$xy(x+y)=-12 \quad \text{és} \quad x+y=-4xy$$

azaz

$$x+y=4, \quad xy=-3 \quad \text{vagy} \quad x+y=-4, \quad xy=3.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=2+\sqrt{7}$, $y_1=2-\sqrt{7}$; $x_2=2-\sqrt{7}$, $y_2=2+\sqrt{7}$; $x_3=-1$, $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-1$.

2. Jelölje m a trapéz magasságát. Ekkor

$$(m+8)^2=m^2+400, \quad m=21 \text{ egység.}$$

A trapéz területe $T=588$ területegység.
Jelölje r a trapéz köré írt kör sugarát. Ekkor

$$\sqrt{r^2-24^2}+\sqrt{r^2-4^2}=2, \quad r=\frac{145}{6} \text{ egység.}$$

3. Emeljük ki az adott kifejezésből a $12\cdot 3^{2x}=12\cdot 9^x$-t, majd alakítsuk szorzattá.

$$12\cdot 9^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{2}{3}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)\geq 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \text{ vagy } \left(\frac{2}{3}\right)^x\leq\frac{2}{3}.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $x\leq -2$ vagy $x\geq 1$.

4. Mivel a kör érinti az y tengelyt, ezért egyenletét

$$(x-u)^2+(y-v)^2=u^2$$

alakban kereshetjük, és a $Q(0;v)$ pontban érinti a kör az y tengelyt. A $P(9;5)$ pont rajta van a körön és $PQ^2=90$, azaz

$$(9-u)^2+(5-v)^2=u^2$$

és

$$9^2+(5-v)^2=90.$$

Innen $v_1=2$, $v_2=8$ és $u=5$. A feltételeknek megfelelő körök egyenletei: $(x-5)^2+(y-2)^2=25$, illetve $(x-5)^2+(y-8)^2=25$.

5. Legyen $AC=4$, $BC=6$ és $AB=8$ egység. A C csúcsból induló szögfelező az AB oldalt (a szögfelező osztásarány tétele miatt) abban az F pontban metszi, amelyre $AF=$3,2. Jelölje α az A csúcsnál fekvő szöget, r pedig a szóban forgó kör sugarát.

A koszinusztétel alkalmazásával $\cos\alpha=\frac{11}{16}$, így $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{15}}{16}$ és $r=3,2\cdot\sin\alpha=\frac{3\sqrt{15}}{5}$ egység.

A CF szögfelező hossza az ACF háromszögből koszinusztétellel számítható ki, $CF=\sqrt{8,64}$ egység. (Területszámítás alkalmazásával is dolgozhatunk.)

6. Jelölje $f(x)$ az adott kifejezést. Az abszolút érték definíciójának alkalmazásával

$$f(x)=\begin{cases} 4x+2, & \text{ha } 0<x\leq\frac{1}{2},\\ 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}, & \text{ha } -1\leq x\leq 0,\\ -4x-2, & \text{ha } -\frac{3}{2}\leq x<-1.\end{cases}$$

A függvény értéke az adott intervallumokban

$$2<f(x)\leq 4, \text{ ha } 0<x\leq\frac{1}{2},$$

$$3/2\leq f(x)\leq 2, \text{ ha } -1\leq x\leq 0,$$

$$2<f(x)\leq 4, \text{ ha } -\frac{3}{2}\leq x<-1.$$

A függvény legnagyobb értéke 4, amelyet az $x_1 = \frac{1}{2}$ és az $x_2 = -\frac{3}{2}$ helyeken vesz fel. A függvény legkisebb értéke $\frac{3}{2}$, amelyet az $x_3 = -\frac{1}{2}$ helyen vesz fel.

7. Legyen az első egyenlet két gyöke x_1, x_2, akkor a második egyenlet két gyöke $2x_1$ és x_3.

Mivel $x_1^2 + px_1 - q = 0$ és $4x_1^2 - 6x_1 + q = 0$, ezért $5x_1^2 - 5px_1 = 0$, azaz $x_1 = 0$ vagy $x_1 = p$.

Ha $x_1 = 0$, akkor $q = 0$ és így $p^2 = 36$, $p = 6$ vagy $p = -6$, ha $x_1 = p$, akkor $p^2 - 3p^2 + q = 0$, $q = 2p^2$, tehát $9p^2 = 36$, $p^2 = 4$ és így $q = 8$. Ebben az esetben tehát ha $q = 8$, akkor $p = 2$ vagy $p = -2$. (Más módon is dolgozhatunk! Hogyan?)

8. Az egyenletnek $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nem lehet megoldása. Ekvivalens átalakítással:

$$(\sin x)(\sin 2x - p) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor $x_{1,n} = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ mindig megoldás.

a) Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor $x_{1,n}$ megoldásokon kívül a $\sin 2x = \frac{1}{2}$ megoldások is adódnak

$$x_{2,n} = \frac{\pi}{12} + n\pi, \quad x_{3,n} = \frac{5\pi}{12} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ha $p = -\frac{1}{2}$, akkor $x_{1,n}$ megoldásokon kívül a $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ megoldásai is adódnak.

$$x_{4,n} = \frac{7\pi}{12} + n\pi, \quad x_{5,n} = \frac{11\pi}{12} + n\pi, \quad \in \mathbf{Z}.$$

b) $x_{1,0} = 0$ és $x_{1,1} = \pi$ megoldások.

Ha $|p| > 1$, akkor ez a *két* megoldás van.

Ha $p = 0$, akkor $2x = \frac{n\pi}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, így $x_{1,0}$ és $x_{1,1}$ adódik, tehát *két* megoldás van.

Ha $p = 1$ vagy $p = -1$ akkor *három* megoldás van: $x = \frac{\pi}{4}$, illetve $x = \frac{3\pi}{4}$ adódik $x_{1,0}$ és $x_{1,1}$ mellett.

Ha $0 < p < 1$ vagy $-1 < p < 0$, akkor *négy* megoldás van, $x_{1,0}$ és $x_{1,1}$-en kívül $x = \frac{\alpha}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, ahol $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, illetve $x = \frac{\beta}{2}$ és $x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, ahol $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$.