

1. A számláló $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot (-6\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$, a nevező $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, a hányados 6.

2. Jelölje x és y a két alaphoz az érintési pont és a ferde szár közé eső darabot, $y \geq x$. Így a ferde szár $x + y$. Az alapokra merőleges szár $2r = 4$, egyben a magasság. A középvonal hossza $\frac{t}{m} = \frac{18}{4} = \frac{1}{2}(2 + x + 2 + y)$, innen $x + y = 5$. Az alapok különbsége $y - x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, tehát $y = 4$, $x = 1$. Az alapok 6 és 3, a szárak 4 és 5.

3. A $\sin x = u$ ismeretlenre $4u^2 + 8u + 3 = 0$, $u_1 = -0,5$ és $|u_2| > 1$, nem használható.

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

4. A középpont az AB szakasz felező merőlegesére is illeszkedik, egyenlete $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2$, azaz $x+y=6$. A középpont: $K(4, 2)$, a sugár $KA = 3$, a kívánt egyenlet: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$, másképpen: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$.

5. A logaritmusnak csak akkor van értelme, ha $x > 0$ és $x \neq 1$. A jobb oldal akkor nem negatív, ha $y = \lg_2 x < 0$, azaz $0 < x < 1$.

$$\lg_x 4 = \lg_x 2^2 = 2 \lg_x 2 = \frac{2}{\lg_2 x} = \frac{2}{y}.$$

A $2 + \frac{2}{y} = \frac{12}{y^2}$ egyenletből $\frac{1}{y} = \frac{2 \pm 10}{24}$. Csak az egyik gyök negatív, $\lg_2 x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{8}$.

6.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\frac{2}{4} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

E két egyenletből $5a^2 - 5b^2 + c^2 = 0$ és $3a^2 + b^2 - 3c^2 = 0$. (A harmadik ilyen egyenlet nem független ezektől.) A két egyenletből az ismeretlenek arányát lehet meghatározni: $a^2 : b^2 : c^2 = 7 : 9 : 10$, tehát $a : b : c = \sqrt{7} : 3 : \sqrt{10}$.

7. Legyen ABP a P -nél derékszögű háromszög, és P az AB egyenessel kettévágott sík C -t nem tartalmazó fésíkján van. A P -nél lévő szög felezője átmegy az ABP háromszög köré írt körből a másik fésíkon lévő AB ív K felezőpontján, így lesz az AK és BK ívek egyenlősége miatt $APK \sphericalangle = BPK \sphericalangle$. (Ez tetszőleges háromszögben igaz.) A mi esetünkben K az AB átmérő fölé befelé írt félkörív felezőpontja, ABK egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagyis K a négyzet átlóinak metszéspontja, szimmetriaközéppontja. A négyzetnek a felező két oldalán lévő darabjai egybevágók, egyenlő területűek.

8. A feltétel mellett

$$\text{I. vagy } x = y$$

$$\text{II. vagy } x = -y,$$

az egyenlőtlenség bal oldala így egyszerűsödik:

$$(8+p)x^2 - 2x + \frac{1}{16}. \quad (8-p)x^2 + \frac{1}{16}.$$

Ezek akkor nem negatívok, ha egyrészt x^2 együttthatója pozitív, azaz

$$p > -8 \quad p \leq 8,$$

és ez a II. esetben elegendő is. Az I. esetben az is kell, hogy a diszkrimináns határozatlan negatív legyen, azaz

$$4 - \frac{8+p}{4} < 0, \quad p > 8.$$

Mivel p -re mind a három feltételnek teljesülnie kell, ezért az egyetlen szóba jövő érték $p=8$, ekkor a megadott egyenlőtlenség $\left(2(x+y) + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ alakú.