

A háromszög és a tetraéder geometriájában számos párhuzam fedezhető fel. A háromszögekre vonatkozó tételek tekintélyes részének a megfelelője megtalálható a tetraéderek körében is. Egyik legjellegzetesebb példája ennek a tetraéderbe írt gömb sugarának a meghatározása, amely pontosan ugyanazt az utat követi, mint a háromszögbe írt kör sugarának a kiszámítása, és ennek megfelelően a két eredmény szerkezete is megegyezik; a háromszögbe írt kör  $r$  sugara:

$$r = \frac{2t}{k},$$

ahol  $t$  a háromszög területe,  $k$  pedig a kerülete; a tetraéderbe írt gömb  $\varrho$  sugara:

$$\varrho = \frac{3V}{A},$$

ahol a  $V$  a tetraéder térfogata,  $A$  pedig a felszíne.

Ugyanekkor azt is meg szokták említeni, hogy ezt a párhuzamot már nem találjuk meg, ha a háromszög köré írt kör, ill. a tetraéder köré írt gömb sugarát akarjuk kifejezni a háromszög, ill. a tetraéder néhány jellegzetes alapadatának a segítségével.

A következőkben mégis megadunk e két sugártípusra egy szerkezetileg teljesen hasonló kiszámítási módot, a háromszögnél ez némileg bonyolultabb a szokásos eljárásnál.

Felhasználunk egy egyszerű (kettős) segédtelet:

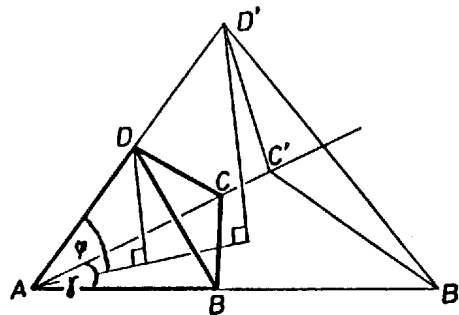
1. Ha az  $ABC$  háromszögnél a  $B'$  ill.  $C'$  az  $A$ -ból induló oldalakat tartalmazó félegyeneseknek egy-egy pontja, akkor az  $ABC$  háromszög  $t$  és az  $AB'C'$  háromszög  $t'$  területének az aránya:

$$t : t' = AB \cdot AC : (AB' \cdot AC').$$

2. Ha az  $ABCD$  tetraédernél  $B', C', D'$  az  $A$ -ból induló éleket tartalmazó félegyenesek egy-egy pontja, akkor az  $ABCD$  tetraéder  $V$  és az  $A'B'C'D'$  tetraéder  $V'$  térfogatának az aránya:

$$V : V' = AB \cdot AC \cdot AD : (AB' \cdot AC' \cdot AD').$$

Az első rész állítása közvetlenül következik abból, hogy  $2t = AB \cdot AC \sin \gamma$  és  $2t' = AB' \cdot AC' \sin \gamma$ , ahol  $\gamma = \angle BAC$ .

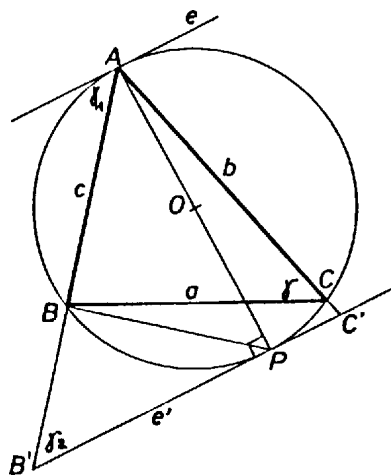


1. ábra

A második résznél figyeljük meg (1. ábra), hogy ha  $\angle BAC = \gamma$  és az  $AD$  félegyenes az  $ABC$  síkkal  $\varphi$  szöget zár be, akkor a két tetraédernél az alapháromszögek területei  $\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \gamma$ , ill.  $\frac{1}{2}AB' \cdot AC' \sin \gamma$ , a hozzájuk tartozó magasságok  $AD \sin \varphi$ , ill.  $AD' \sin \varphi$ , ezért térfogataik:

$$V = \frac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD \sin \gamma \sin \varphi \quad \text{és} \quad V' = \frac{1}{6}AB' \cdot AC' \cdot AD' \sin \gamma \sin \varphi,$$

amiből már közvetlenül következik a segédtelet állítása.



2. ábra

A háromszög köré írt kör  $R$  sugarának a kiszámításához válasszuk ki a háromszög egy olyan csúcsát, amelyből induló oldalak egyike sem tartalmazza a kör  $O$  középpontját (a 2. ábrán ez az  $A$  csúcs); a háromszögnél a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. Az  $A$ -ból induló körátmérő másik végpontja legyen  $P$ . A  $P$  pontbeli  $e'$  körérintő az  $AB$ , ill.  $AC$  oldalegyeneseket a  $B'$ , ill.  $C'$  pontokban metszi,  $e'$  nyilván párhuzamos a kör  $A$  pontbeli érintőjével,  $e$ -vel. A kerületi szögek tétele szerint  $e$  az  $AB$  oldalegyenessel a  $\gamma$ -val egyenlő  $\gamma_1$  szöget zárja be, viszont  $\gamma_1 = AB'C' \sphericalangle = \gamma_2$ , mivel váltószögek. Így az  $ABC$  és  $AC'B'$  hasonló háromszögek, minthogy két-két szögük egyenlő; hasonlóságukból következik, hogy megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{a}{B'C'} = \frac{c}{AC'}, \quad B'C' = \frac{a \cdot AC'}{c}.$$

Az  $APB'$  derékszögű háromszögben  $PB$  merőleges  $AB'$ -re, mivel  $AP$  körátmérő,  $PB$  tehát az átfogóhoz tartozó magasság. A befogó-tétel szerint  $4R^2 = c \cdot AB'$ ; hasonlóan kapjuk az  $APC'$  derékszögű háromszögből, hogy  $4R^2 = b \cdot AC'$ , ezekből

$$(1) \quad AB' = \frac{4R^2}{c}, \quad AC' = \frac{4R^2}{b}, \quad \text{és így} \quad B'C' = \frac{4R^2 \cdot a}{bc}.$$

Segédteételünk 1. részéből következik, hogy ha  $ABC$  területe  $t$ ,  $AB'C'$  területe pedig  $t'$ , akkor

$$t' = \frac{tAB' \cdot AC'}{bc}.$$

Viszont az  $AB'C'$  háromszögben a  $B'C'$  oldalhoz tartozó magasság  $AP = 2R$ , ezért

$$t' = B'C' \cdot R.$$

E két területkifejezés jobb oldalai tehát egyenlők, végezzük el bennük az (1)-ből adódó helyettesítéseket:

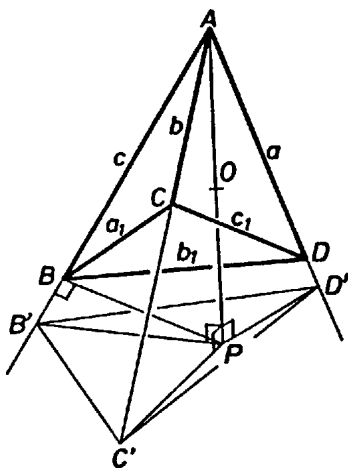
$$\frac{t}{bc} \cdot \frac{4R^2}{c} \cdot \frac{4R^2}{b} = \frac{4R^3 \cdot a}{bc},$$

egyszerűsítések és rendezés után ebből a jól ismert

$$R = \frac{abc}{4t}$$

képletet kaptuk.

Térjünk most rá a tetraéder köré írt gömb sugarának a meghatározására. Legyen az  $ABCD$  tetraéder térfogata  $V$ , a köré írt gömb középpontja  $O$ , sugara  $R$ ; vezessük be továbbá az  $AB = c$ ,  $CD = c_1$ ,  $AC = b$ ,  $BD = b_1$ ,  $AD = a$ ,  $BC = a_1$  jelöléseket (tehát a tetraéder szemközti éleit jelöljük ugyanazzal a betűvel).



3. ábra

Vizsgálataink egyszerűsítése céljából válasszuk ki a tetraéder egy olyan csúcsát, amelyen átmenő élek egyike sem tartalmazza  $O$ -t, legyen ez  $A$  (3. ábra). Az  $A$ -n átmenő gömbátmérő  $A$ -val ellentétes végpontja legyen  $P$ . A gömb  $P$  pontbeli érintő síkja az  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  egyeneseket rendre a  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  pontokban metszi. Mivel az érintő sík merőleges  $AP$ -re, az  $APB'$ ,  $APC'$ ,  $APD'$  derékszögű háromszögek.

Minthogy  $AP$  gömbátmérő,  $AB$  merőleges  $PB$ -re, ezért az  $APB'$  derékszögű háromszögben  $PB$  az átfogóhoz tartozó magasság.

Alkalmazzuk erre a háromszögre a befogó-tételt:

$$AB \cdot AB' = AP^2, \quad \text{azaz} \quad c \cdot AB' = 4R^2,$$

ebből:

$$(2) \quad AB' = \frac{4R^2}{c},$$

hasonlóan kapjuk:

$$(3) \quad AC' = \frac{4R^2}{b} \quad \text{és} \quad AD' = \frac{4R^2}{a}.$$

Ebből is következik, hogy az  $ABC$  és  $AC'B'$  háromszögek hasonlóak, mivel (2)-ből és (3)-ból

$$\frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$$

adódik, a két háromszög tehát megegyezik egy szögben és az azt közrefogó oldalak arányában. A hasonlóság következménye, hogy

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AC'},$$

vagyis (3) felhasználásával

$$\frac{a_1}{B'C'} = \frac{cb}{4R^2},$$

azaz

$$B'C' = \frac{4R^2}{abc} aa_1,$$

hasonlóan kapjuk:

$$C'D' = \frac{4R^2}{abc} cc_1$$

és

$$D'B' = \frac{4R^2}{abc} bb_1.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy

(\*) *létezik olyan  $H$  háromszög, amelynek oldalai  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$ ,*

hiszen  $B'C'D'$ -re  $\frac{abc}{4R^2}$  arányú hasonlóságot alkalmazva éppen a  $H$  háromszöget kapjuk meg. Ha  $H$  területét  $T$ -vel jelöljük,  $B'C'D'$  területe:

$$\frac{16R^4}{a^2b^2c^2}T.$$

Segédételünk 2. része szerint az  $AB'C'D'$  tetraéder térfogata (2) és (3) felhasználásával

$$V' = \frac{V \cdot AB' \cdot AC' \cdot AD'}{abc} = \frac{V \cdot 64R^6}{a^2b^2c^2}.$$

Viszont az  $AB'C'D'$  tetraéder  $B'C'D'$  lapjához  $2R$  hosszúságú magasság tartozik, ezért térfogata,  $V'$  az alapterületből és a magasságból kiszámítható:

$$V' = \frac{16R^4 \cdot T}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{32R^5T}{3a^2b^2c^2}.$$

A térfogat két kifejezésének egyenlőségéből kapjuk, hogy

$$\frac{V \cdot 64R^6}{a^2b^2c^2} = \frac{32R^5T}{3a^2b^2c^2},$$

amiből a tetraéder köré írt gömb sugárképlete:  $R = \frac{T}{6V}$ .

A képletnek ezt a formáját von Staudt (1798–1867) német matematikusnak tulajdonítják. Eszerint:

*a tetraéder köré írt gömb sugárhosszát úgy kapjuk meg, hogy annak a háromszögnek a területét, amelynek oldalai a szemközti élek szorzatával egyenlő, elosztjuk a tetraéder térfogatának a hatszorosával.*

*Megjegyzések:* 1. A háromszög köré írt kör sugárképletét úgy is felfoghatjuk, hogy a sugarat a háromszög oldalaival fejezzük ki, hiszen a terület Heron képlete alapján az oldalakból kiszámítható.

Ugyanez a tetraéder sugárképletéről is elmondható, mivel a tetraéder térfogata kifejezhető az élek segítségével. Ezt a nem túl egyszerű kifejezést determináns alakjában szokás megadni (l. pl. Hajós György: Bevezetés a geometriába, 318 old.).

2. Levezetéseinkben a  $P$  pont kiválasztására vonatkozó kikötés nem lényeges, a  $P$  bármelyik csúcson átmenő átmérő végpontja lehet.

3. Meggondolásainkban egyes részeredmények a térgeometria több érdekes mozzanatára világítanak rá. A tetraéder köré írt gömb csúcsokhoz tartozó érintősíkjaival párhuzamos síkok mind a  $H$  háromszöghöz hasonló háromszögben metszik a tetraédert. A 3. ábrán észrevehetjük, hogy a  $BCC'B'$  és  $DCC'D'$  négyszögek húrnégyszögek. Ebből következik, hogy a  $BCD$  és  $B'C'D'$  háromszögek egy gömbön vannak, és minden olyan gömb, amely a tetraéder valamelyik lapháromszögének három csúcán átmegy, a háromszögön kívüli élekből  $H$ -hoz hasonló háromszöget metsz ki.

A (\*)-gal jelzett eredményünk egy érdekes következménye: Ha  $P$  az  $ABC$  szabályos háromszög síkján kívüli pont, akkor a  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ , szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög. (Könnyen bizonyítható, hogy ez csak szabályos háromszögre igaz).

Ha a tetraéder lapjai egybevágó háromszögek (egyenlő oldalú tetraéder), akkor szemközti élei szükségképpen egyenlő hosszúak. (\*) ebben az esetben azt mondja ki, hogy ha a tetraéder lapjainak oldalhosszai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , akkor létezik  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  oldalú háromszög is. Ez azonban azt jelenti, hogy pl.  $a^2 + b^2 > c^2$ , ami egyenértékű azzal, hogy az  $a$  és a  $b$  oldalak szöge hegyesszög, tehát az egyenlő oldalú tetraéder lapjai szükségképpen hegyesszögű háromszögek.

4. Felmerül a kérdés, hogy fel lehet-e venni a tetraéder élein egy-egy belső pontot úgy, hogy az egy csúcsból induló éleken lévő pontok egy  $H$ -hoz hasonló háromszög csúcsai legyenek. Ha ez lehetséges, akkor a hat felvett pont konvex burka egy nyolc háromszöggel határolt test (négyszögre épített kettős gúla, ún. általános oktaéder), amelynek négy lapja  $H$ -hoz hasonló. Megmutatható, hogy ez lehetséges abban az esetben, ha a tetraéder magasságpontos (ortocentrikus), azaz magasságai egy ponton mennek át és lapjai hegyesszögű háromszögek. Ennek az oktaédernek érdekes tulajdonsága, hogy a szóban forgó tetraéderbe írható oktaéderek közül ennek az élösszege a legkisebb.