

*Bevezetés.* Az Olimpia 6. feladatához néhány megjegyzést fűzve vetettem fel a következő kérdést (KöMaL 1991/8-9. szám, 344. old.):

Milyen kicsi lehet az  $\alpha$ , ha található hozzá olyan  $\xi$ , hogy tetszőleges  $q > 0$  és  $p$  egészekre fennáll az

$$(1) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\alpha q^2}$$

egyenlőtlenség?

Az  $\alpha$ -ra azért volt szükségünk, hogy segítségével elő tudjunk állítani egy olyan, a feladatban megkívánt tulajdonságú sorozatot, amelynek elemei egy  $\alpha$  hosszúságú nyílt intervallumban helyezkednek el. Az intervallum sugara tehát annál kisebb, minél kisebbre tudjuk az  $\alpha$ -t választani.

A múltkori dolgozatban részleges választ adtam a kérdésre, bebizonyítva azt, hogy  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  még megfelelő (pl.  $\xi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  esetén), továbbá, hogy  $\alpha < 2,5$  már nem lehetséges.

Ebben a dolgozatban többek között teljes választ adtam erre a kérdésre: igazoltam, hogy a jó  $\alpha$ -k között van legkisebb, mégpedig éppen  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ . (Ez egyébként azt jelenti, hogy az előző dolgozatban definiált  $h$  értéke  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $I_a = (h, +\infty)$  és  $I_b = (0, h)$ , továbbá hogy az ott megadott módszerrel konstruált  $(x_k)$  sorozat lehető legkisebb korlátja  $\beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ .)

Tanulságos végiggondolni, hogy hogyan kaptuk a múltkor az  $\alpha \geq 2,5$  eredményt.

Mindenekelőtt vezessük be tetszőleges  $x$  valós szám esetén az  $x$ -nek a hozzá legközelebbi egésztől való eltérésére az  $\|x\|$  jelölést:

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \min(\{x\}, 1 - \{x\}),$$

ahol  $\{x\} = x - [x]$  az  $x$  törtrészt jelöli.

Nyilvánvaló, hogy (1) pontosan akkor teljesül valamilyen  $\alpha$  mellett a  $\xi$ -re, ha  $\|\xi\|$ -re (vagy pl.  $(1 - \|\xi\|)$ -re) is fennáll, ezért az általánosság csorbitása nélkül feltehetjük, hogy  $\xi \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  vagy hogy  $\xi \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ; (kényelmi szempontból hol az egyik, hol a másik intervallummal dolgozunk majd).

Ezzel a megjegyzéssel ui. azt kapjuk, hogy az (1)-ben az  $\alpha$ -hoz pontosan akkor található megfelelő  $\xi$ , ha a  $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2}\right)$  alakú intervallumok ( $q > 0$  és  $p$  egészek) nem fedik le a  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ -et, illetve ami ezzel ekvivalens:  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -et. Na már most az, hogy az  $\alpha$  nem megfelelő számunkra (tehát, hogy nem található hozzá (1)-beli  $\xi$ ), éppen azt jelenti, hogy

$$(*) \quad \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset \bigcup_{p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2}\right).$$

Aki ismeri a híres Borel-féle befedési tételt, az ezen a ponton felkiált: hohó, hiszen ebből következik, hogy a rossz  $\alpha$ -k között nincs maximális, vagyis hogy a jó  $\alpha$ -k között van minimális. Ha ui. feltesszük, hogy a rossz  $\alpha$ -k között van egy  $\alpha^*$  maximális, akkor arra (\*) teljesül, ami azt jelenti, hogy a bal oldali zárt intervallumot lefedik a jobb oldali nyílt intervallumok. A Borel-tétel szerint tehát a jobb oldali nyílt intervallumok közül már véges sok is befedi az  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -et, és ekkor – amint az könnyen végiggondolható – a fedő intervallumokat összehúzhatjuk egy kicsit a középpontjukból úgy, hogy továbbra is befedjék az  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -et. Más szóval az  $\alpha^*$ -ot egy kicsit növelve még mindig rossz  $\alpha$ -t kapunk, ami ellentmond  $\alpha^*$  maximalitásának.

A Borel-tétel segítségével tehát máris beláttuk, hogy a jó  $\alpha$ -k között van minimális: ezt természetesen bizonyítani fogjuk az alábbiakban a Borel-tétel felhasználása nélkül is. A Borel-féle befedési tétel mindenesetre azt jelenti, hogy minden rossz  $\alpha$ -hoz meg tudunk adni véges sok  $\frac{p}{q}$  törtet úgy, hogy már azokkal is teljesüljön (\*).

Hogyan bizonyítanánk például ezt az elvet szem előtt tartva, hogy  $\alpha < 2$  nem lehetséges (1)-ben? Egyszerűen úgy, hogy a (\*) jobb oldalán egyetlen  $\frac{p}{q}$  törtet veszünk,  $\frac{p}{q} = 1$ , és már az ehhez tartozó intervallum is lefedi az  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ -et:

$$\text{Ha } \alpha < 2, \text{ akkor } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset \left(1 - \frac{1}{\alpha}; 1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Ahogy  $\alpha$ -t a 2-höz közelítjük (alulról), a jobb oldali intervallum bal végpontja  $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$  az  $\frac{1}{2}$ -hez tart, ami arra késztet bennünket, hogy az  $\frac{1}{2}$ -et is vegyük be a  $\frac{p}{q}$  törtek (eddig csak az  $\frac{1}{1}$ ) közé.

A kérdés tehát az, hogy milyen lehet az  $\alpha$ , ha

$$(*) \quad \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\alpha}; 1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Egyszerű számolás adja az  $\alpha < \frac{5}{2}$  eredményt.

Ezzel tehát beláttuk, hogy az  $\alpha < 2,5$  számok a rossz  $\alpha$ -k közé tartoznak, hiszen kielégítik a (\*) relációt.

Mi történik akkor, ha most nem állunk meg, és a felhasznált  $\frac{p}{q}$ -k eddigi halmazát  $\left(\frac{1}{2}\right.$  és  $1)$  bővíteni próbáljuk?

Az  $\alpha$ -t az  $\frac{5}{2}$ -hez közelítve a (\*) jobb oldalán álló nyílt intervallumok  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha}$ , illetve  $1 - \frac{1}{\alpha}$  határpontjai a közös  $\frac{3}{5}$  értékhez tartanak, tehát célszerű a  $\frac{p}{q}$ -khoz a  $\frac{3}{5}$ -öt is hozzávenni. Feltéve most a kérdést, hogy milyen  $\alpha$ -kra teljesül

$$\left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha}\right) \cup \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25\alpha}; \frac{3}{5} + \frac{1}{25\alpha}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\alpha}; 1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

az  $\alpha < \frac{13}{5}$  egyenlőtlenséget kapjuk.

Tehát az  $\alpha < \frac{13}{5}$  számok is a rossz  $\alpha$ -k közé tartoznak. Ezt a sort még jó ideig folytathatnánk, eközben mindenkiben kialakulna az a sejtés, hogy a  $\frac{p}{q}$ -k közé az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \dots$$

szomszédos Fibonacci-számok hányadosait érdemes felvenni (ezek éppen a kritikus  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  értékhez közelítenek), és ezekkel rendre az

$$\alpha < \frac{2}{1}, \alpha < \frac{5}{2}, \alpha < \frac{13}{5}, \alpha < \frac{34}{13}, \dots$$

számokat tudnánk besorolni a rossz  $\alpha$ -k közé.

Az egyenlőtlenségek jobb oldalán éppen a Fibonacci-sorozat bizonyos másodsomszédos elemeiből képzett hányadosok állnak, ezeknek pedig a  $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$  a határértéke.

Vagyis a sejtés igaz volta éppen azt jelentené, hogy minden  $\alpha < \frac{\sqrt{5}+3}{2}$  kielégíti a (\*) relációt, tehát hogy az (1)-ben jó  $\alpha$ -kra fennáll  $\alpha \geq \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ . Mivel pedig láttuk, hogy  $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$  jó, ez azt igazolná, hogy a jó  $\alpha$ -k legkisebbike  $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ .

Ezt az elég vázlatos fejtegetést írjuk át a továbbiakban precíz tételekké és bizonyításokká.

\*

Az egyszerűség kedvéért legyen  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \|x\|$ , és jelöljön  $\xi$  a továbbiakban mindig *irracionális* számot (racionális számokra ui. triviálisak a tételek).

**1. Tétel.**

a) Ha  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \|\xi\|$ , akkor alkalmas  $q > 0$  és  $p$  egészekkel  $\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot q^2} > \left|\xi - \frac{p}{q}\right|$ .

b) Ha  $\|\xi\| < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , akkor alkalmas  $q > 0$  és  $p$  egészekkel  $\frac{1}{3 \cdot q^2} > \left|\xi - \frac{p}{q}\right|$ .

A bizonyításnál és a későbbiekben is segítségünkre lesz a következő, önmagában is érdekes

**1. Lemma.** Tetszőleges pozitív egész  $k$  szám esetén értelmezzük az  $(s_n)$  sorozatot az

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_1 &= 1, \\ s_n &= ks_{n-1} + s_{n-2}, \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

előírással. Jelöljük továbbá a szomszédos elemek hányadosaiból képzett sorozatot  $(t_n)$ -nel

$$t_n = \frac{s_n}{s_{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

- a)  $s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad (n \geq 1);$
- b)  $t_n - t_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{s_n s_{n+1}}, \quad (n \geq 1);$
- c)  $s_{n-2}s_{n+1} - s_{n-1}s_n = k \cdot (-1)^{n-1}, \quad (n \geq 2);$
- d)  $t_{n-2} - t_n = \frac{k \cdot (-1)^{n-1}}{s_{n-1}s_{n+1}}, \quad (n \geq 2);$
- e)  $t_0 < t_2 < t_4 < \dots < \gamma_k < \dots < t_5 < t_3 < t_1;$
- $\lim_n t_n = \gamma_k$ , ahol  $\gamma_k = \frac{\sqrt{k^2 + 4} - k}{2}$

*Bizonyítás.*

a) Legyen  $i \geq 2$  tetszőleges egész. Ekkor a definíció szerint

$$\begin{aligned} s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1} &= s_i^2 - s_{i-1}(ks_i + s_{i-1}) = -s_{i-1}^2 + s_i^2 - ks_{i-1}s_i = \\ &= -s_{i-1}^2 + s_i(s_i - ks_{i-1}) = -s_{i-1}^2 + s_{i-2}s_i, \text{ azaz} \\ \frac{s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1}}{s_{i-1}^2 - s_{i-2}s_i} &= -1, \text{ tehát} \\ s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} &= (s_1^2 - s_0s_2) \prod_{i=2}^n \frac{s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1}}{s_{i-1}^2 - s_{i-2}s_i} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

b) Triviálisan adódik a)-ból.

c) Felhasználva a)-t,

$$\begin{aligned} s_{n-2}s_{n+1} - s_{n-1}s_n &= s_{n-2}(ks_n + s_{n-1}) - s_{n-1}(ks_{n-1} + s_{n-2}) = \\ &= ks_{n-2}s_n - ks_{n-1}^2 = -k(s_{n-1}^2 - s_{n-2}s_n) = \\ &= -k \cdot (-1)^{n-2} = k \cdot (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

d) Triviálisan adódik c)-ből.

e) A d) összefüggés szerint a  $t_n - t_{n-2}$  különbség pozitív vagy negatív aszerint, hogy  $n$  páros vagy páratlan. Így  $t_0 < t_2 < t_4 < \dots$ , illetve  $t_1 > t_3 > t_5 > \dots$ .

Ha  $n = 2m$  páros, akkor b)-ből

$$\begin{aligned} t_{2m} - t_{2m-1} &= t_n - t_{n-1} < 0, \text{ azaz} \\ t_{2m} &< t_{2m-1} \leq t_1, \end{aligned}$$

tehát a növekvő  $(t_0, t_2, t_4, \dots)$  sorozat felülről korlátos, ami miatt létezik az  $L_0 = \lim_m t_{2m}$  határérték. Hasonlóan a fogyó  $(t_1, t_3, t_5, \dots)$  sorozat alulról korlátos, ami miatt létezik az  $L_1 = \lim_m t_{2m-1}$  határérték. Mivel  $s_n \rightarrow \infty$  (ez nyilvánvaló), ezért b)-ből

$$\begin{aligned} \lim_m (t_{2m-1} - t_{2m}) &= 0, \text{ azaz} \\ L_1 - L_0 &= 0 \text{ következik.} \end{aligned}$$

Így tehát  $L_0 = L_1$ , és létezik az  $L = \lim_n t_n$  határérték. Erre természetesen

$$t_0 < t_2 < t_4 < \dots < L < \dots < t_5 < t_3 < t_1.$$

Nyilván

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} &= \lim_n \frac{1}{t_n t_{n+1}} = \lim_n \frac{s_{n+2}}{s_n} = \lim_n \frac{k \cdot s_{n+1} + s_n}{s_n} = \\ &= 1 + k \cdot \lim_n \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1 + \frac{k}{L}, \end{aligned}$$

tehát  $\frac{1}{L}$  gyöke az

$$(2) \quad x^2 = kx + 1$$

egyenletnek.

Ha még figyelembe vesszük, hogy  $\frac{1}{L} > \frac{1}{t_1} = k$ , akkor

$$\frac{1}{L} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \text{ vagyis}$$

$$L = \frac{2}{k + \sqrt{k^2 + 4}} = \frac{\sqrt{k^2 + 4} - k}{2} = \gamma_k.$$

**2. Lemma.** Rögzítsük  $k$  értékét, és használjuk az 1. Lemma jelöléseit.

a) Ha  $m$  tetszőleges természetes szám, akkor

$$(3) \quad \alpha = k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2m+1}s_{2m+3}}$$

esetén

$$[t_{2m}; \gamma_k) \subset \bigcup_{l=m}^{\infty} \left[ t_{2l} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} \right].$$

b)

$$(4) \quad \alpha = k + \frac{2}{k}$$

esetén

$$(\gamma_k; t_1] \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[ t_{2l-1} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2}; t_{2l-1} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2} \right].$$

*Bizonyítás.*

a) Az állítás azt mondja ki, hogy a  $[t_{2m}; \gamma_k)$  intervallumot lefedik az

$$\left[ \frac{s_{2l}}{s_{2l+1}} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; \frac{s_{2l}}{s_{2l+1}} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} \right] \quad (l \geq m)$$

alakú intervallumok, ha  $\alpha$  értékét (3)-nak választjuk. Az 1. Lemma e) állítása szerint

$$[t_{2m}; \gamma_k) = \bigcup_{l=m}^{\infty} [t_{2l}; t_{2l+2}],$$

ezért elegendő belátnunk; hogy  $l \geq m$  esetén

$$[t_{2l}; t_{2l+2}] \subset \left[ t_{2l} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} \right] \cup \left[ t_{2l+2} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}; t_{2l+2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2} \right].$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$[t_{2l}; t_{2l+2}] \subset \left[ t_{2l}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} \right] \cup \left[ t_{2l+2} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}; t_{2l+2} \right],$$

azaz ha

$$t_{2l+2} - t_{2l} \leq \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}.$$

Az egyenlőtlenséget az 1. Lemma a) és d) összefüggéseinek segítségével ekvivalensen átalakítva

$$\begin{aligned}
\frac{k}{s_{2l+1}s_{2l+3}} &\leq \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}, \quad \text{azaz} \\
k \cdot \alpha &\leq \frac{s_{2l+3}^2 + s_{2l+1}^2}{s_{2l+1}s_{2l+3}} = \frac{(s_{2l+3} - s_{2l+1})^2 + 2s_{2l+1}s_{2l+3}}{s_{2l+1}s_{2l+3}} = \\
&= 2 + \frac{(s_{2l+3} - s_{2l+1})^2}{s_{2l+1}s_{2l+3}} = 2 + \frac{(ks_{2l+2})^2}{s_{2l+1}s_{2l+3}} = \\
&= 2 + k^2 \cdot \frac{s_{2l+1}s_{2l+3} - 1}{s_{2l+1}s_{2l+3}}, \quad \text{vagyis} \\
(5) \quad \alpha &\leq k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2l+1}s_{2l+3}},
\end{aligned}$$

amit (3)-mal egybevetve

$$\begin{aligned}
-\frac{k}{s_{2m+1}s_{2m+3}} &\leq -\frac{k}{s_{2l+1}s_{2l+3}}, \\
s_{2m+1}s_{2m+3} &\leq s_{2l+1}s_{2l+3};
\end{aligned}$$

ez pedig  $m \leq l$  miatt nyilván teljesül.

b) Hasonlóan az a) állítás bizonyításához,

$$(\gamma_k; t_1] = \bigcup_{l=1}^{\infty} [t_{2l+1}; t_{2l-1}]$$

miatt elegendő tetszőleges  $l \geq 1$  esetére belátnunk a

$$|t_{2l+1} - t_{2l-1}| \leq \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+2}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2}$$

egyenlőtlenséget, amiből az előző esetbelivel azonos ekvivalens átalakítással az (5)-höz hasonló

$$(5') \quad \alpha \leq k + \frac{2}{k} + \frac{k}{s_{2l}s_{2l+2}}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel most  $\alpha$  értékét (4) adja meg, ezért (5') valóban fennáll, és ez igazolja állításunkat.  $\square$

Az 1. és a 2. Lemmából nekünk csak a  $k = 1, 2$ ;  $m = 1, 2$  esetre lesz szükségünk.

Legyen először  $k = 1$  és  $m = 1$ . Ekkor az 1. Lemmában  $(s_n)$  megegyezik a jól ismert Fibonacci-sorozattal, és  $\gamma_k$  értéke  $(\gamma_1)$  éppen  $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . A 2. Lemma a) állításában

$$\alpha = 1 + 2 - \frac{1}{s_3 \cdot s_5} = 3 - \frac{1}{2 \cdot 5} = 2,9; \quad t_{2m} = t_2 = \frac{1}{2};$$

a b) állításban pedig

$$\alpha = 3 \quad \text{és} \quad t_1 = 1.$$

Ezek szerint

$$(6) \quad \left[ \frac{1}{2}; \gamma \right) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[ t_{2l} - \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2} \right], \quad \text{illetve}$$

$$(7) \quad (\gamma; 1] \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[ t_{2l-1} - \frac{1}{3 \cdot s_{2l}^2}; t_{2l-1} + \frac{1}{3 \cdot s_{2l}^2} \right].$$

*Az 1. Tétel bizonyítása.*

A bevezetőbeli megjegyzés alapján feltehetjük, hogy  $\xi = f(\xi)$ , amikor is

$\frac{1}{2} < \xi < 1$  ( $\xi$  irracionális).

a) A feltétel szerint  $f(\xi) < \gamma$ , azaz  $\frac{1}{2} < \xi < \gamma$ , amikor is (6) szerint van olyan  $l$  pozitív egész, hogy

$$\begin{aligned}
\xi &\in \left[ t_{2l} - \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2} \right] \quad \text{azaz} \\
|\xi - t_{2l}| &\leq \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2},
\end{aligned}$$

vagyis a  $p = s_{2l}, q = s_{2l+1} (> 0)$  választással

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2,9 \cdot q^2};$$

mivel  $\xi$  irracionális, ezért itt az egyenlőség nem állhat fenn, tehát

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2,9 \cdot q^2},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

b) Ugyanúgy következik (7)-ből, mint az a) állítás (6)-ból.

Ezzel tehát az 1. Tételt beláttuk.

Ugyanezzel a módszerrel általában adódik a 2. Lemmából a

**3. Lemma.** Rögzítsük le  $k$  értékét és használjuk az 1. Lemma jelöléseit. Legyen továbbá

$$a) t_{2m} < \xi < \gamma_k \text{ esetén } \alpha = k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2m+1}s_{2m+3}},$$

$$b) \gamma_k < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{k} (= t_1) \text{ esetén } \alpha = k + \frac{2}{k}.$$

Ekkor alkalmas  $q > 0$  és  $p$  egészekkel

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha q^2} > \left| \xi - \frac{p}{q} \right|.$$

Az 1. Tétel nem más, mint ennek a lemmának a  $k = 1, m = 1$  választással adódó speciális esete (a  $\xi$  helyett a lemmában  $(1 - \|\xi\|)$ -t kell helyettesíteni).

A  $k = 2, m = 1$  esetben kapjuk, hogy

$$a) \frac{2}{5} < \xi < \gamma_2 = \sqrt{2} - 1 \text{ esetén az } \alpha = 3 - \frac{2}{5 \cdot 29} \text{ értékkel,}$$

$$b) \sqrt{2} - 1 = \gamma_2 < \xi < \frac{1}{2} \text{ esetén az } \alpha = 3 \text{ értékkel}$$

teljesül (8) – ha  $q > 0$  és  $p$  alkalmas egészek.

Ha most a 3. Lemma a) állításában  $k$ -t 1-nek,  $m$ -et pedig 2-nek választjuk, akkor

$$t_{2m} = t_4 = \frac{s_4}{s_5} = \frac{3}{5} \text{ és } \alpha = 3 - \frac{1}{s_5 s_7} = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13}$$

lévén kapjuk, hogy

$$c) \frac{3}{5} < \xi < \gamma_1 = \gamma \text{ esetén az } \alpha = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13} \text{ értékkel kielégíthető a (8) egyenlőtlenség.}$$

A legutóbbi a) és b) összefüggésekben  $\xi$  helyettesíthető  $\|\xi\|$ -val, a c) összefüggésben pedig  $(1 - \|\xi\|)$ -val.

Ezért tehát – felhasználva az 1. Tételt – teljesül a

**2. Tétel.** Legyen

$$a) \|\xi\| < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ esetén } \alpha = 3,$$

$$b) \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \|\xi\| < \frac{2}{5} \text{ esetén } \alpha = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13},$$

$$c) \frac{2}{5} < \|\xi\| < \sqrt{2} - 1 \text{ esetén } \alpha = 3 - \frac{2}{5 \cdot 29},$$

$$d) \sqrt{2} - 1 < \|\xi\| \text{ esetén } \alpha = 3;$$

akkor alkalmas  $q > 0$  és  $p$  egészekkel

$$\frac{1}{\alpha q^2} > \left| \xi - \frac{p}{q} \right|. \quad \square$$

A tétel csak azokról a  $\xi$ -k-ről nem ad felvilágosítást, amelyekre

$$\|\xi\| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ vagy } \|\xi\| = \sqrt{2} - 1.$$

Az előző dolgozatban viszont láttuk, hogy

a) ha  $\|\xi\| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ , akkor van olyan  $q > 0$  és  $p$  egész, hogy  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} q^2}$ , és itt a  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  konstans nem növelhető tovább;

b) ha  $\|\xi\| = \sqrt{2} - 1$ , akkor van olyan  $q > 0$  és  $p$  egész, hogy  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) q^2}$ , és itt a  $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$  konstans nem növelhető tovább.

Mindezek alapján kimondhatjuk a dolgozat fő eredményét, amely szerint lényegében a  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  és a  $\sqrt{2}$  esik a „legtávolabbra” az összes racionális számtól.

### 3. Tétel.

a) Tetszőleges  $\xi$ -hez találhatók olyan  $q > 0$  és  $p$  egészek, hogy az  $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  tényezővel

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha q^2} \geq \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$$

fennálljon. Itt az  $\alpha$  nem növelhető tovább akkor (és csak akkor), ha

$$\|\xi\| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

b) Ha kikötjük, hogy  $\xi \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  legyen, akkor (9) kielégíthető az  $\alpha = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$  tényezővel is. Az  $\alpha$  itt sem növelhető tovább akkor, ha  $\|\xi\| = \sqrt{2} - 1$  (és csak ekkor, hiszen minden további esetben jó például  $\alpha = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13}$ ).  $\square$

Ezek után már nyilvánvaló, hogy pontosan az  $\alpha \geq \frac{\sqrt{5}+3}{2}$  számokhoz található olyan  $\xi$  szám, amelyre tetszőleges  $q > 0$  és  $p$  egészekkel teljesül az (1) egyenlőtlenség.

Végezetül szeretném megköszönni Surányi János tanár úrnak értékes megjegyzéseit, amiknek hatására a dolgozatot a jelenlegi formájára átdolgoztam.