

**Az 1990–91. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
feladatai
Első (iskolai) forduló**

I. kategória

1. feladat: Egy tetraéder (háromszög alapú gúla) csúcsai: A, B, C, D . Az AB él hossza 82 cm. A többi él hossza növekvő sorrendben: 14 cm, 26 cm, 36 cm, 54 cm, 72 cm. Melyik lehet ezek közül a CD él hossza?

(8 pont)

2. feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned}x + xy + y &= 2 + 3\sqrt{2}; \\ x^2 + y^2 &= 6.\end{aligned}$$

(8 pont)

3. feladat: Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja. Jelöljük S_1 -gyel a PAB háromszög, S_2 -vel a PBC háromszög, S_3 -mal a PCA háromszög súlypontját. Bizonyítsuk be, hogy az $S_1S_2S_3$ háromszög területe független a P pont helyzetétől!

(12 pont)

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ és $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$$

(12 pont)

5. feladat: Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$x^2 - y^2 = 4p$$

egyenletet, ha p prímszám!

(14 pont)

6. feladat: Egy háromszög oldalai a, b, c hosszúságúak, és igaz ezekre a következő összefüggés:

$$(b^2 + a^2)(2c^2 - b^2 - a^2) = c^2(c^2 + 1) + 4b(b - c).$$

Számítsuk ki a háromszög szögeit!

(14 pont)

II. kategória

1. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlói merőlegesek egymásra, $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ szögei pedig ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat egymást követő elemei. Az ABD háromszög $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ szögei is egy számtani sorozat egymást követő elemei. Határozzuk meg a $\frac{BD}{AC}$ arány pontos értékét!

(7 pont)

2. feladat: Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) oldalaira kifelé olyan téglalapokat szerkesztünk, amelyek két szomszédos oldala a trapéz megfelelő két szemközti oldalával egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapok középpontjai egy négyzet csúcsait!

(7 pont)

3. feladat: Határozzuk meg a valós számokon értelmezett

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $1 \leq x \leq 4$ intervallumon!

(7 pont)

4. feladat: Palindrom számok azok a természetes számok, amelyek hátulról előre olvasva ugyanazt az értéket adják, mint előlről hátulra olvasva (ilyen például az 1991). Van-e a százjegyű palindrom számok között a) prímszám; b) köbszám?

(7 pont)

5. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely n természetes számra

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}],$$

ahol $[c]$ a c szám egész részét jelöli.

(7 pont)

III. kategória

1. feladat: Palindrom számok azok a természetes számok, amelyek hátulról előre olvasva ugyanazt az értéket adják, mint előlről hátulra olvasva (ilyen például az 1991). Van-e a százjegyű palindrom számok között a) prímszám; b) köbszám?

(7 pont)

2. feladat: Tegyük fel, hogy $ABCD$ négyszög B -nél levő szöge konkáv, továbbá, hogy a négyszög területe $\frac{1}{4}(AD \cdot DC - AB \cdot BC)$ területegység. Mekkora a konkáv szög, ha az A és C csúcsból induló belső szögfelezők merőlegesek egymásra?

(7 pont)

3. feladat: Rajzoljunk egy háromszög beírt köréhez valamelyik oldallal párhuzamos érintőt. Igazoljuk, hogy ennek a háromszögbe eső szakasza nem lehet a kerület nyolcadrészénél nagyobb. Fennállhat-e egyenlőség?

(7 pont)

4. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely n természetes számra

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}],$$

ahol $[c]$ a c szám egész részét jelöli.

(7 pont)

5. feladat: Egy dobozban három egyforma méretű és anyagú, de különböző színű golyó van. Anna és Balázs megkéri egy társukat, hogy újra és újra húzzon ki egy golyót, jegyezze fel a színét, és tegye vissza. A játék akkor ér véget, amikor az alábbi két esemény valamelyike legelőször bekövetkezik:

A) Már mindhárom golyót kihúzták.

B) Valamelyik golyót már háromszor kihúzták.

Ha a játék az (A) eseménnyel fejeződik be, akkor Anna nyert, ha pedig a (B) eseménnyel, akkor Balázs. Kinek nagyobb a nyerési esélye?

(7 pont)

Második (döntő) forduló

I. kategória

1. feladat: Egy zenekar tagjai közül mindenki pontosan egy hangszeren játszik, mégpedig vagy ütős, vagy vonós, vagy fúvós hangszeren. Az ütős hangszereken játszóknak átlagéletkora 37 év, a fúvósoké 23 év, a vonósoké 41 év. Tudjuk azt is, hogy az ütősök és fúvósok közös átlagéletkorát számítva 29 évet kapunk; továbbá a fúvósok és vonósok együttesének átlagéletkora 33 év; végül a vonósok és ütősök esetén az átlagéletkor 39,5 év.

Mennyi a teljes zenekar átlagéletkora?

2. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögbe maximális területű téglalapot írunk be úgy, hogy a téglalap egyik oldala a háromszög egyik oldalára, két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalára illeszkedjék. A háromszög egyes oldalai fölé a leírt módon emelt maximális területű téglalapok közül melyik területe a legnagyobb és melyik kerülete a legkisebb? Mit mondhatunk akkor, ha az ABC háromszög derékszögű?

3. feladat: Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$1 < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma + \sin \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta} < 2.$$

II. kategória

1. feladat: Hány olyan különböző (H_1, H_2, H_3) halmazhármass van (ahol a halmazok sorrendje is lényeges), amelyekre

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

és

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \emptyset$$

egyaránt teljesül?

2. feladat: Adjuk meg az összes olyan valós együtthatós

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinomot, amelyek minden valós x -re kielégítik az

$$1 - x^4 \leq p(x) \leq 1 + x^4$$

egyenlőtlenséget!

3. feladat: Egy hatszög szögei egyenlők, területe 1, oldalainak hossza pedig valamilyen sorrendben egy d differenciájú számtani sorozat egymást követő elemei. Mely d értékek esetén van – egybevágóság erejéig – a hatszög egyértelműen meghatározva?

III. kategória

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 2y + 8 &= 0 \\ 4x^2 + y^3 &= 113 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása valós számokban.

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy egy legalább ötoldalú konvex sokszögnek van olyan csúcsa, amelyet egy alkalmas átló felezőpontjára tükrözve a sokszög belső pontjához jutunk.

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n-1}{n} \binom{n}{1} + \binom{2n-2}{n} \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{2n-n}{n} \binom{n}{n} = 1$$

egyenlőség bármely n pozitív egészre teljesül.

**Az 1990-91. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
eredménye**
Pénzjutalomban és díszoklevélben részesültek:

I. kategória

I. díj: Solymári György (Budapest, Egressy G. Szki., IV. o. t., tanára: Sztanó Tamásné),

II. díj: Bagyinszki Róbert (Békéscsaba, Széchenyi I. Közgazd. Szki., III. o. t., tanára: Szabó Jánosné),

III. díj: Váradi István (Budapest, Hámán K. Közgazd. Szki., IV. o. t., tanára: Fazekas József).

II. kategória

I. díj: Bodor András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. IV. o. t., tanára: Tóth Attila),

II. díj: Molnár Dénes (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t., tanára: Biró Lajos),

III. díj: Battyányi Péter (Berettyóújfalú, Arany J. Gimn., IV. o. t., tanára: Körtvélyesi János).

III. kategória

I. díj: Álmos Attila (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t., tanárai: Ökördi Péterné, Urbán János),

II. díj: Szendrői Balázs (Budapest., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t., tanárai: Surányi László, Kőváry Károly),

III. díj: Boncz András (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o. t., tanárai Csiszár Mária, Németh László).

Díszoklevélben és könyvjutalomban részesültek:

I. kategória

4. **Csizmadia Zoltán** (Szeged, Kőrösy J. Közg. és Keresk. Szki., III. o. t., tanára: Szalay Éva),
5. **Mézes Zsolt** (Jászberény, Liska J. Ip. Szki., IV. o. t., tanára: Bakki Árpád),
6. **Bíró Erika** (Budapest, Teleki B. Közg. Szki., III. o. t., tanára: Csánkné Hollósy K.),
7. **Lénárt Zsolt** (Paks, Energetikai Szki., IV. o. t., tanárai: Árokszállási Tibor, Árokszállási Tiborné, Torma Béla),
8. **Miskovics Gábor** (Győr, Lengyel Gy. Közg. Szki., tanára: Pákozdiné Miletics E.),
9. **Kisida Gábor** (Miskolc, Fáy A. Közg. Szki., IV. o. t., tanára: Káveczky Ilona),
10. **Trepszker Emese** (Budapest, Hámán K. Közg. Szki., III. o. t., tanára: Janicsek Pálné).

II. kategória

4. **Egyedi Péter** (Pécs, Leőwey K. Gimn., IV. o. t., tanára: Gombocz Ernő),
5. **Mártonfi Attila** (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o. t., tanára: Dékány Józsefné),
6. **Zsák András** (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., III. o. t., tanára: Gulyás Ferencné),
7. **Falus Péter** (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyak. Gimn., IV. o. t., tanárai: Reményi Gusztávné, dr. Gerőcs László),
8. **Nagy Benedek** (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., IV. o. t., tanára: Mucsá János),
9. **Pataki Iván** (Dunaújváros, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t., tanára: Kobzos Ferencné),
10. **Lente Gábor** (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t., tanára: Hevesi Zoltán).

III. kategória

4. **Erben Péter** (Budapest, Berzsényi D. Gimn., IV. o. t., tanárai: Bánhegyi László, Bánhegyi Balázs),
5. **Radics Norbert** (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., III. o. t., tanárai: Mihályi Gyula, Vecsernyés Géza),
6. **Perlaki Tamás** (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t., tanára: Szvetits Zoltán),
7. **Varga Dániel** (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t., tanárai: Vincze Márta, Kőváry Károly),
8. **Kőszegi Botond** (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t., tanárai: Surányi László, Kőváry Károly),
9. **Matolcsi Máté** (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t., tanárai: Surányi László, Kőváry Károly, Pataki János),
10. **Szalkai Ákos** (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t., tanárai: Vincze Márta, Kőváry Károly).

Dícsérő oklevelet és könyvjutalmat kaptak:

I. kategória

11. *Bakos András* (Kecskemét, Kada E. Közg. Szki., IV. o. t.), 12. *Maros Róbert* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., IV. o. t.), 13. *Gajdos Attila* (Békéscsaba, Széchenyi I. Közg. és Külker. Szki., IV. o. t.), 14. *Fornai Péter* (Paks, Energetikai Szki., III. o. t.), 15. *Simon Tamás* (Győr, Pattantyús Ábrahám G. Ip. Szki., IV. o. t.), 16. *Kósa István* (Nyíregyháza, Vásárhelyi P. Építőip. és Vízügyi Szki., IV. o. t.), 17. *Bláth Péter* (Eger, Gép- és Műszerip. Szki., IV. o. t.), 18. *Végső Viktor* (Nyíregyháza, Vásárhelyi P. Építőip. és Vízügyi Szki., III. o. t.), 19. *Gonda Zoltán* (Szolnok, Rep. Műsz. Szki., IV. o. t.), 20. *Kelemen Tamás* (Sopron, Kempelen F. Gép. Szki., IV. o. t.).

II. kategória

11. *Stoll Márk* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.), 12. *Antal Gergely* (Szentendre, Ferences Gimn., IV. o. t.), 13. *László Péter* (Bp., Veres P. Gimn., IV. o. t.), 14. *Gárdonyi Márk* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.), 15. *Jakusch Tamás* (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.), 16. *Bujtor Balázs* (Bp., ELTE Trefort Á. Gyak. Gimn., o. t.), 17. *Kórácz Tamás* (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.), 18. *Szentes Balázs* (Bp., József A. Gimn., III. o. t.), 19. *Kulcsár Béla* (Kecskemét, Katona J. Gimn., III. o. t.), 20. *Szabó Jenő* (Sárvár, Tinódi S. Gimn., IV. o. t.).

III. kategória

11. *Pór Attila* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.), 12. *Ujváry-Menyhárt Zoltán* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.), 13. *Káli Szabolcs* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), 14. *Weiner Gábor* (Bp., Szent István Gimn., IV. o. t.), 15. *Miklós György* (Bp., Szent István Gimn., IV. o. t.), 16. *Papolczy Péter* (Bp., Berzsényi

D. Gimn., IV. o. t.), 17. *Kovács Flórián* (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.), 18. *Szegedy Krisztián* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), 19. *Komócsi Sándor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.), 20. *Jónap Richárd* (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.).

Miniszteri oklevelet és dicséretet kaptak:

I. kategória

21. *Marosi Balázs* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., IV. o. t.), 22. *Jakus László* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., IV. o. t.), 23. *Tóth László* (Győr, Lengyel Gy. Közg. Szki., IV. o. t.), 24. *Balogh Norbert* (Nyíregyháza, Széchenyi I. Közg. és Külker. Szki., IV. o. t.), 25. *Kóródi Dávid* (Miskolc, Kandó K. Hír. tech. Szki., III. o. t.), 26. *Koskocsák Mihály* (Bp., Hunfalvy J. Közg. Szki., IV. o. t.), 27. *Nagy László* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., IV. o. t.), 28. *Sasovits Szilvia* (Nyíregyháza Széchenyi I. Közg. és Ker. Szki., IV. o. t.), 29. *Kiss István* (Hajdúnánás, Kőrösi Csoma S. Gimn. és Szki., III. o. t.), 30. *Garzó Béla* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., IV. o. t.), 31. *Ónodi Annamária* (Bp., II. Rákóczi F. Közg. Szki., IV. o. t.), 32. *Springer Róbert* (Kecskemét, 623. sz. Vágó B. Szki., IV. o. t.), 33. *Dudás János* (Vác, Ipari Szki., IV. o. t.), 34. *László Róbert* (Miskolc, Bláthy O. Vill. ip. Szki., III. o. t.), 35. *Ragályi Gábor* (Miskolc, Bláthy O. Vill. ip. Szki., IV. o. t.), 36. *Dani Zsolt* (Szeged, Kőrösy J. Közg. és Külker. Szki., III. o. t.), 37. *Kiss Tibor* (Debrecen, Mechwart A. Műsz. Szki., IV. o. t.), 38. *Seláf Szabolcs* (Székesfehérvár, Széchenyi I. Műsz. Szki., III. o. t.), 39. *Tyíttye Anita* (Debrecen, Híradásip. Műsz. Szki., IV. o. t.), 40. *Tóth Ilidikó* (Nyíregyháza, Vásárhelyi P. Ép. ip. és Vízü. Szki., IV. o. t.), 41. *Bernáth Zsolt* (Bp., Hámán K. Közg. Szki., III. o. t.), 42. *Radnai Tibor* (Pécs, Zipernovszky K. Ip. Szki., IV. o. t.), 43. *Csata Viktor* (Bp., Bolyai J. Hír tech. Szki., III. o. t.), 44. *Pipis László* (Kazincbarcika, Irinyi J. Szki., IV. o. t.), 45. *Tóth Gábor* (Bp., Fáy A. Közl. gép. Szki., IV. o. t.), 46. *Váczi Pál* (Paks, Energetikai Szki., IV. o. t.), 47. *Kocsis Attila* (Szeged, Déri M. Ip. Szki., III. o. t.).

II. kategória

21–43. *helyezettek* (betűrendben): *Antal Kálmán* (Bp., ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Baji Gál János* (Gödöllő, Török I. Gimn., IV. o. t.), *Brendel Máttyás* (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.), *Csereháti Zoltán* (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., III. o. t.), *Daruka István* (Karcag, Gábor A. Gimn., IV. o. t.), *Firle Róbert* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.), *Gara Péter* (Bp., Eötvös J. Gimn., III. o. t.), *Hajnal Ákos* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.), *Hegedűs András* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.), *Horváth István* (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.), *Jelasity Márk* (Székesfehérvár, József A. Gimn., IV. o. t.), *Kocsis László* (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.), *Koncz Levente* (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.), *Kósa Tamás* (Bp., ELTE Trefort Á. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Körmöczy Csaba* (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t.), *Lengyel Sándor* (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., IV. o. t.), *Molnár Pál* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Révész Ádám* (Székesfehérvár, József A. Gimn., IV. o. t.), *Rózsa Richárd* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.), *Simon Tamás* (Bp., Toldy F. Gimn., IV. o. t.), *Somlai Gábor* (Kecskemét, Piarista Gimn., III. o. t.), *Szarka Rudolf* (Szolnok, Varga K. Gimn., IV. o. t.), *Vidács Attila* (Bp., Táncsics M. Gimn., IV. o. t.).

III. kategória

21–25. *helyezettek* (betűrendben): *Hegedűs László* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Nagypál Éva* (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Szegedy Balázs* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.), *Szín Róbert* (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Török János* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o. t.).

26–34. *helyezettek* (betűrendben): *Barabás Gyula* (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., IV. o. t.), *Czirók András* (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.), *Fleiner Balázs* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Gógor László* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.), *Lakos Gyula* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.), *Piróth Attila* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.), *Tóth Bálint* (Bp., Berzsényi D. Gimn., III. o. t.), *Turányi Zoltán Richárd* (Bp., Berzsényi D. Gimn., IV. o. t.), *Virág Bálint* (Bp., Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.).