**1.** *Legyen $p$ páratlan prímszám, $n$ pedig pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy $pn^2$-nek legfeljebb egy olyan $d$ pozitív osztója van, amelyikre $d+n^2$ négyzetszám.*

**I. megoldás:** A számelmélet alaptétele értelmében $d$ prímszámhatványok szorzatára történő felbontásában csak azok a prímszámok szerepelhetnek, amelyek $pn^2$ felbontásában szerepelnek, és legfeljebb akkora kitevőn, mint az utóbbi felbontásban. Így két esetet különböztethetünk meg. Ha $p$ nem szerepel $d$ felbontásában, akkor $d$ osztója $n^2$-nek is, ha pedig szerepel, akkor $d=pd'$, ahol $d'$ osztója $n^2$-nek.

Feltétel szerint van olyan $m$ pozitív egész, amelyre az első esetben

$$d+n^2=m^2, \quad \text{a másodikban} \quad pd'+n^2=m^2.$$

Véve $d$, illetőleg $d'$ egy tetszés szerinti $q$ prím osztóját, azzal $n^2$ és $m^2$ is osztható. Mivel a prímtényezős felbontás lényegében egyértelmű, ez csak úgy lehetséges, ha az alapok is oszthatók $q$-val, és így $n^2$ és $m^2$ osztható $q^2$-tel.

Ekkor $d$, illetőleg $d'$ is osztható $q^2$-tel, kivéve a második esetben, ha $q=p$. Az említett eset kivételével tehát egyszerűsíthetünk $q^2$-tel, és

$$d^*+n'^2=m'^2, \quad \text{illetőleg} \quad pd^*+n'^2=m'^2$$

alakú összefüggésekhez jutunk, ahol $d^*$ osztója $n'^2$-nek.

Ha a második esetben $q=p$, akkor is oszthatunk $q^2$-tel, csak akkor a fenti első típusú egyenlethez jutunk, ahol $d^*$ most is osztója lesz $n'^2$-nek.

Az eljárást megismételhetjük sorra $d^*$ minden prím osztójára, és így azt kapjuk, hogy van olyan pozitív egész $n_1$ és $m_1$, amelyekkel fennáll, hogy

$$1+{n_1}^2={m_1}^2 \quad \text{vagy} \quad p+{n_1}^2={m_1}^2. \tag{1}$$

Az eljárás során minden lépésben $n$ egy $q$ prím osztójának a négyzetével egyszerűsítettünk, tehát végül is egy olyan ${n_2}^2$ egésszel, amelyikre

$$n=n_1n_2 \quad \text{és} \quad d={n_2}^2, \quad \text{illetőleg} \quad d=p{n_2}^2.$$

Az (1) alatti első egyenlet nem állhat fenn, mert két pozitív négyzetszám különbsége legalább 3. A második egyenlőségből

$$p=(m_1+n_1)(m_1-n_1).$$

Mivel $p$ prímszám, így ebből

$$m_1+n_1=p, \quad m_1-n_1=1, \quad \text{tehát} \quad 2n_1=p-1.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a feladat feltételei akkor teljesülhetnek, ha

$$n=\frac{1}{2}(p-1)n_2 \quad \text{és} \quad d=p{n_2}^2.$$

Ezekre

$$d+n^2=\left\{p+\left[\frac{1}{2}(p-1)\right]^2\right\}n_2^2=\left[\frac{1}{2}(p+1)\right]^2n_2^2=\left[\frac{1}{2}(p+1)n_2\right]^2$$

valóban négyzetszám.

Eszerint valóban legfeljebb egy megfelelő $d$ van, éspedig akkor van ilyen, ha $n$ osztható $\dfrac{1}{2}(p-1)$-gyel.

*Megjegyzés:* Nem használtuk ki a megoldás során, hogy $p$ páratlan, viszont $p=2$ esetben az (1) alatti második egyenlőség sem állhat fenn, tehát nincs a feladat feltételeit kielégítő $d$ szám. Ennek bizonyítását kívánta az 1953. évi verseny 2. feladata.[1]

Valamivel rövidebb megoldást kapunk, ha felhasználjuk az úgynevezett eukleidészi lemmát, amelyik szerint ha egy szám osztója egy szorzatnak, de relatív prím az egyik tényezőhöz, akkor osztója a másik tényezőnek.

**II. megoldás:** Feltétel szerint van olyan $k$ és $m$ egész, amelyekre

$$pn^2=dk \quad \text{és} \quad d+n^2=m^2.$$

Jelöljük $n$ és $m$ legnagyobb közös osztóját $d'$-vel. Ekkor $n=d'n'$, $m=d'm'$, ahol $m'$ és $n'$ egymáshoz relatív prím.

A fenti második egyenlőséget $k$-val végigszorozva és felhasználva az elsőt és az utolsó két egyenlőséget, az előbbi így írható:

$$(p+k)d'^2n'^2=kd'^2m'^2, \quad \text{amiből} \quad (p+k)n'^2=km'^2.$$

A prímtényezős felbontás egyértelműsége folytán $m'^2$-nek és $n'^2$-nek csak olyan prímek lehetnek osztói, és így közös osztói is, amelyek az alapoknak is osztói, ami esetünkben azt jelenti, hogy a két négyzet relatív prím. Az eukleidészi

[1] Lásd, Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.: *Matematikai versenytételek II. köt.,* 3. kiad., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. 157-158.old.

lemma szerint tehát $n'^2$, ami osztója a jobb oldalnak, kell, hogy az első tényezőnek legyen osztója. Alkalmas $k'$ egésszel tehát

$$k = n'^2 k'.$$

Ezt beírva utolsó egyenlőségünkbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$p + n'^2 k' = k' m'^2,$$

vagy átrendezve

$$p = k'(m'^2 - n'^2) = k'(m' - n')(m' + n').$$

Mivel $p$ (pozitív) osztói csak 1 és $p$, így a jobb oldalon egy tényező értéke $p$, a másik kettőé 1, és mivel az utolsó tényező nagyobb az előtte állónál, így

$$m' + n' = p, \quad k' = m' - n' = 1, \quad \text{tehát} \quad n' = \frac{1}{2}(p-1), \quad n = \frac{1}{2}(p-1)d'.$$

Mindezeket beírva az első feltételi egyenlőségbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$d = pd'^2,$$

tehát $p$ és $n$ meghatározza $d$-t – feltéve, hogy egyáltalán létezik megfelelő $d$; ennek pedig az a feltétele, hogy $n$ osztható legyen $\frac{1}{2}(p-1)$-gyel.

**III. megoldás:** Legyen $m$ olyan egész szám, amelyikre $d + n^2 = m^2$, azaz

$$d = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

Jelöljük $m+n$ és $m-n$ legnagyobb közös osztóját $d'$-vel. Ekkor alkalmas $b$ és $c$ egészekkel

$$m + n = bd', \qquad m - n = cd',$$

ahol $b$ és $c$ relatív prím egymáshoz, $b > c$ és

$$d = bcd'^2, \qquad 2n = (b-c)d'.$$

Az, hogy $d$ osztója $pn^2$-nek, azt jelenti, hogy van olyan $k$ egész, amellyel

$$pn^2 = dk,$$

vagyis 4-gyel szorozva és a fent találtakat beírva

$$p(b-c)^2 d'^2 = 4bcd'^2 k, \quad \text{amiből} \quad p(b-c)^2 = 4bck.$$

Mivel $b$-nek és $c$-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, így $b$-nek és $c$-nek $b-c$-vel sem lehet 1-nél nagyobb közös osztója. Ekkor azonban mind a kettő $p$-nek kell, hogy osztója legyen, tehát

$$b = p, \quad c = 1, \quad \text{így} \quad k = \left[\frac{1}{2}(p-1)\right]^2, \quad d' = \frac{2n}{p-1};$$

ezekből pedig

$$d = p\left(\frac{2n}{p-1}\right)^2.$$

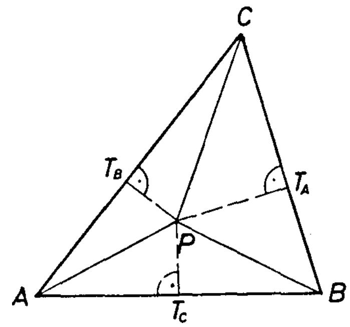
Ezzel azt kaptuk, hogy $p$ és $n$ már meghatározza $d$-t. Egyben azt is kaptuk, hogy ilyen $d$ akkor van, ha $n$ az $\frac{1}{2}(p-1)$ többszöröse.

*Megjegyzések:* 1. Ha $p = 2$, akkor csak annyi változik, hogy $\frac{1}{2}(p-1)$ nem egész, s így semmilyen $n$-hez nincs megfelelő $d$.

2. Mind a három megoldás módot ad az alkalmas $d$ osztók megkeresésére akkor is, ha $p$ helyébe tetszés szerinti összetett számot írunk. Ekkor lehet több ilyen $d$ is.

**2.** *Az $ABC$ háromszög beírt körének középpontja legyen $K$, a hozzáírt körök középpontjai $A_0$, $B_0$, $C_0$. Jelölje $A_1$ a $BC$ oldal és a $BKC$ szög felezőjének, $B_1$ az $AC$ oldal és az $AKC$ szög felezőjének, $C_1$ pedig az $AB$ oldal és az $AKB$ szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az $A_0A_1$, $B_0B_1$, $C_0C_1$ egyenesek egy ponton mennek át.*

**I. megoldás:** A megoldást a következő megjegyzésre építjük. Egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldal egy pontjával összekötő szakaszhoz egyértelműen tartozik egy arányszám, amelyikre igaz, hogy egy pont akkor és csak akkor pontja a szakasznak, ha a pont és a szakasszal közös csúcsból induló oldalak távolságainak az aránya az adott érték.




*1. ábra*

Ha az $ABC$ háromszög egy $P$ pontjának merőleges vetülete a $BC$, $CA$ és $AB$ oldalon rendre $T_A$, $T_B$ és $T_C$ (*1. ábra*), akkor az $AP$, $BP$, $CP$ egyenesekhez (ill. a háromszögbe eső szakaszaikhoz) tartozó arányok

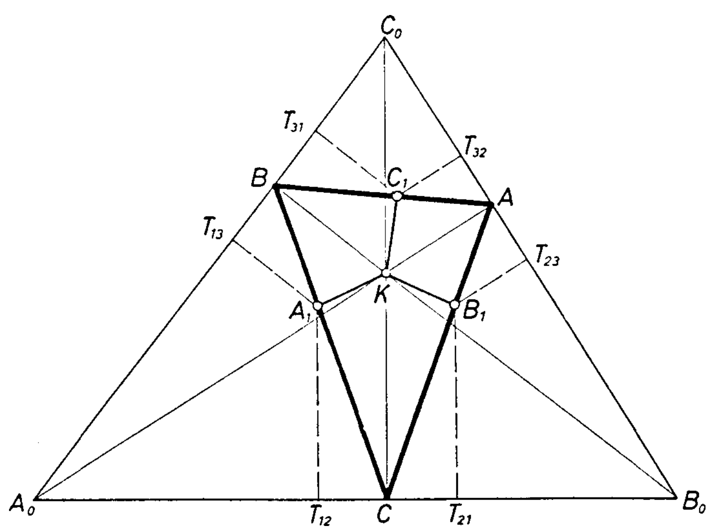
$$r_A = PT_B : PT_C, \quad r_B = PT_C : PT_A, \quad r_C = PT_A : PT_B,$$

és így

(2) $$r_A r_B r_C = 1.$$

Ha fordítva, $P$ egy az $A$ csúcson és egy a $B$ csúcson átmenő egyenes metszéspontja, akkor a két egyeneshez tartozó arány a fenti $r_A$ és $r_B$ érték. Ha fennáll (2), akkor $r_C$ is a fenti érték, s így a $C$ ponton átmenő egyenes is átmegy $P$-n.

Más szóval, *ha az $A$,$B$, $C$ csúcson átmenő egy-egy egyenesszakaszhoz tartozó arány $r_A$, $r_B$, $r_C$, akkor a szakaszok akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha teljesül* (2).




*2. ábra*

A feladatra térve $A_0$, $B_0$, $C_0$ a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az $A$, $B$, $C$ csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalaira esnek (*2. ábra*). Jelöljük az $ABC$ háromszög szögeit a szokásos módon $\alpha$, $\beta$, $\gamma$-val; $A_1$ merőleges vetületét az $A_0B_0$, $A_0C_0$ oldalon $T_{12}$-vel, illetőleg $T_{13}$-mal, és megfelelően a másik két pont vetületeit, amint az ábra mutatja. Ekkor az $A_0A_1$ egyenesre vonatkozó arány az $A_0B_0C_0$ háromszögben

$$r_a = \frac{A_1T_{12}}{A_1T_{13}} = \frac{A_1C \sin BCA_0}{A_1B \sin CBA_0} = \frac{A_1C \cos\frac{\gamma}{2}}{A_1B \cos\frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan

$$r_B = \frac{B_1A \cos\frac{\alpha}{2}}{B_1C \cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad r_C = \frac{C_1B \cos\frac{\beta}{2}}{C_1A \cos\frac{\alpha}{2}},$$

és a három arány szorzata

$$\frac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

Tudjuk azonban, hogy a háromszög egy szögének a felezője a szemközti oldalt olyan szakaszokra osztja, amelyeknek az aránya megegyezik a mellettük fekvő oldalak arányával. Ezt egymás után $CKB$, $AKC$, majd a $BKA$ háromszögekre alkalmazva.

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \qquad \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AK}{CK}, \qquad \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{BK}{AK}.$$

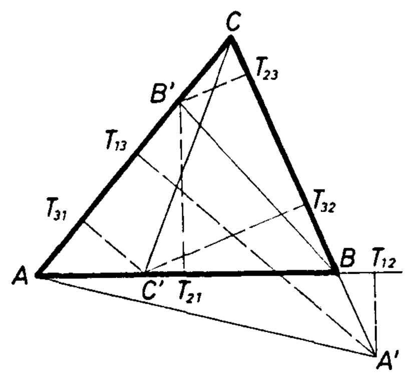
Ezek figyelembevételével azt kapjuk, hogy a fenti szorzat értéke 1, tehát az előrebocsátott megjegyzés értelmében a három egyenes egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzések.* 1. A $K$ pontról csak annyit használtunk fel, hogy az $ABC$ háromszögben van, így a feladat állítása a háromszög bármely $K$ pontjára igaz.

2. A bevezető megjegyzésben a háromszög pontjaira szorítkoztunk. Ettől a megszorítástól azonban megszabadulhatunk, ha a háromszög oldalaitól mért távolságot előjelesen értjük: pozitívnak tekintjük azokra a pontokra, amelyek az oldalnak a háromszöget tartalmazó partján vannak, és negatívnak a másik félsík pontjaira. Ekkor csak a háromszög oldalegyeneseit célszerű kizárni.

3. Megvizsgáljuk most a kérdést ennek megfelelően tekintetbe véve az egész síkot. Legyen az $ABC$ háromszög $BC$ oldalának egy pontja $A'$, merőleges vetülete az $AB$ és $AC$ oldalon $T_{12}$ és $T_{13}$ (*3. ábra*). Ekkor – a háromszög szögeit a szokásos módon jelölve – az $AA'$ egyenest jellemző arány

$$r_A = \frac{A'T_{12}}{A'T_{13}} = \frac{BA'\sin\beta}{A'C\sin\gamma}.$$



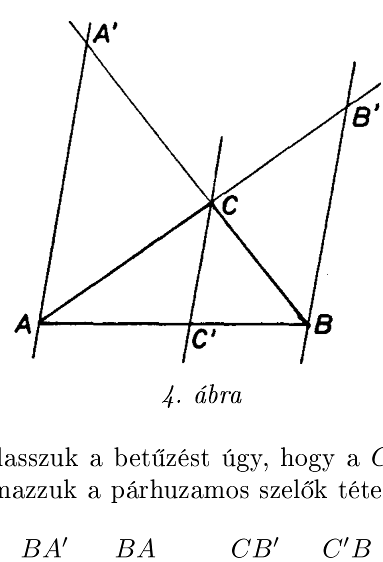

*3. ábra*

Ha $B'$ és $C'$ a $CA$, illetőleg az $AB$ oldal egy-egy pontja, és felírjuk hasonló módon a $BB'$ és a $CC'$ egyenesre vonatkozó $r_B$ és $r_C$ arányt is, akkor a jobb oldalak szorzatában a számlálóban is, a nevezőben is ugyanaz a szinuszszorzat lép fel, így azzal egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a (2) bal oldalán álló szorzat a következővel egyenlő:

$$\frac{BA'\cdot CB'\cdot AC'}{A'C\cdot B'A\cdot C'B}. \tag{3}$$

Az is látható, hogy a felírt arányegyenlőségek előjelet tekintve is helyesek maradnak, ha az oldalegyeneseken egy-egy irányt pozitívnak, az ellentéteset negatívnak tekintve előjeles szakaszokkal számolunk, és az egyenesektől mért távolságot is előjelezve értjük a korábban mondott módon. Irányítsuk az oldalegyeneseket például a háromszög óramutatóval ellentétes irányú körüljárásának megfelelően.

Az továbbra is fennáll, hogy ha az $AA'$, $BB'$, $CC'$ egyenes egy ponton megy keresztül, akkor a (2) szorzat értéke, és így a (3) arányé is 1. A megfordítás helyességének igazolásánál a háromszögben futó két szakasz metszéspontjából indultunk ki. Most azonban felléphetnek párhuzamos egyenesek is.




*4. ábra*

Ha a három egyenes párhuzamos, válasszuk a betűzést úgy, hogy a $C$ csúcs a másik kettőn át húzott párhuzamosok közé essék (*4. ábra*). Ekkor alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $ABA'$ és a $BAB'$ szögeket átmetsző párhuzamosokra:

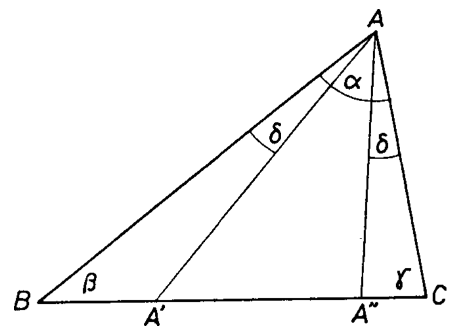
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC'}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{C'B}{BA}.$$

Ezeket a (3) törtbe helyettesítve kapjuk, hogy annak az értéke akkor is 1, ha a három egyenes párhuzamos.

Megfordítva, ha $AA'$ és $BB'$ párhuzamos, akkor $CC'$ nem metszheti őket, mert ha metszené, akkor korábbi meggondolásunk szerint $BB'$ és $CC'$ metszéspontján kellene átmennie $AA'$-nek is.

Azt kaptuk tehát, hogy *véve az $ABC$ háromszög $BC$, $CA$, $AB$ oldalegyenesének egy-egy, a csúcsoktól különböző $A'$, $B'$, $C'$ pontját, az $AA'$, $BB'$ és $CC'$ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak akkor és csak akkor, ha a* (3) *arány értéke* 1. Ez Ceva tétele. Ezt a versenyzők nagy része ismerte és felhasználta megoldásában.

4. Többen ismerték és felhasználták azt is, hogy *ha a háromszög egy-egy csúcsán átmenő három egyenes egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak az egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a megfelelő szögfelezőre, akkor a tükrözött egyenesek is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.*



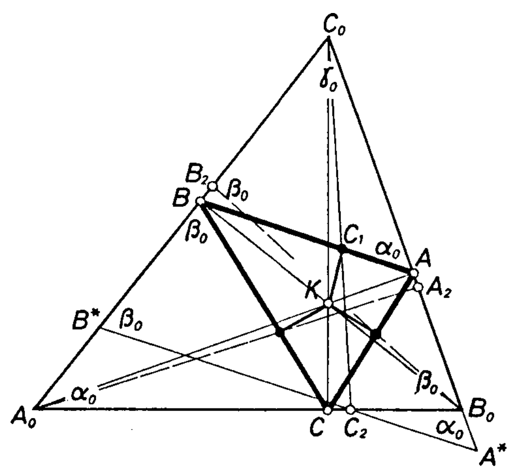
*5. ábra*

Valóban, legyen $A'$ a $BC$ egyenes egy pontja, és messe az $AA'$ egyenesnek az $A$ csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe a $BC$ egyenest az $A''$ pontban. A $BAA'\sphericalangle = \delta$ jelöléssel, mivel a szögfelezőre tükrözünk, $CAA''\sphericalangle = \delta$ (*5. ábra*). Felhasználva a szinusztételt az $AA'B$, $AA'C$, $AA''B$, $AA''C$ háromszögekre

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA'/A'A}{A'C/A'A} = \frac{\sin\delta/\sin\beta}{\sin(\alpha-\delta)/\sin\gamma} = \frac{\sin\delta\sin\gamma}{\sin(\alpha-\delta)\sin\beta},$$
$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA''/A''A}{A''C/A''A} = \frac{\sin(\alpha-\delta)/\sin\beta}{\sin\delta/\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\delta)\sin\gamma}{\sin\delta\sin\beta} = \frac{A'C\sin^2\gamma}{BA'\sin^2\beta}.$$

Felírva a megfelelő arányokat a $BB'$ és a $CC'$ tükörképének metszéspontjaként keletkező $B''$ és $C''$ pontokra is és összeszorozva őket, a számlálóban is, a nevezőben is a háromszög három szöge szinusza négyzetének szorzata keletkezik, így ezzel egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a kétvesszős pontokra felírt (3)-nak megfelelő kifejezés a vesszős pontokra felírtnak a reciprok értéke. Így Ceva tételéből következik a kimondott állítás helyessége.

**II. megoldás:** Jelöljük az $A_0B_0C_0$ háromszög szögeit rendre $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$-val; az $A_0A_1$, $B_0B_1$, $C_0C_1$ egyenesnek és az $A_0B_0C_0$ háromszög szemközti oldalának a metszéspontját $A_2$, $B_2$, $C_2$-vel; húzzunk továbbá $C_2$-n át párhuzamost a $BA$ egyenessel, messe ez a $C_0A_0$, $C_0B_0$ egyenest a $B^\star$, illetőleg $A^\star$ pontban *(6. ábra).*



*6. ábra*

A háromszöghöz hozzáírt körök középpontjai a háromszög két-két külső és egy belső szögfelezőjének a metszéspontjai, továbbá az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, így az $A$, $B$, $C$ csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalain feküsznek, a háromszög magasságainak talppontjai. Ennek folytán $A_0BAB_0$ húrnégyszög, tehát

$$C_0BA\sphericalangle = \beta_0, \qquad C_0AB\sphericalangle = \alpha_0;$$

a szerkesztés szerint pedig

$$C_0A^{\star}B^{\star}\sphericalangle = C_0AB\sphericalangle = \alpha_0, \qquad C_0B^{\star}A^{\star}\sphericalangle = C_0BA\sphericalangle = \beta_0.$$

Eszerint $A_0B^{\star}B_0A^{\star}$ húrnégyszög, mert $B^{\star}B_0$ az $A_0$ és az $A^{\star}$ pontból ugyanakkora szögben látszik. Ekkor a $C_2$-n átmenő szelők szeleteinek szorzata egyenlő:

$$A_0C_2 \cdot C_2B_0 = B^{\star}C_2 \cdot C_2A^{\star}.$$

Ez átrendezhető így:

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{B^{\star}C_2}{C_2A^{\star}} \left(\frac{C_2A^{\star}}{C_2B_0}\right)^2.$$

A jobb oldalt átalakítjuk. A párhuzamos szelők tétele, továbbá a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel alapján

$$\frac{B^{\star}C_2}{C_2A^{\star}} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{KA}.$$

A második tényezőben az alap így alakítható át, a szinusztételt először az $A^{\star}B_0C_2$ háromszögre, majd ellenkező irányban az $A_0B_0C_0$ háromszögre alkalmazva:

$$\frac{C_2A^{\star}}{C_2B_0} = \frac{\sin(180^\circ - \beta_0)}{\sin\alpha_0} = \frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_0} = \frac{C_0A_0}{C_0B_0}.$$

Ezek szerint

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{KB}{KA} \left(\frac{C_0A_0}{C_0B_0}\right)^2.$$

Írjuk fel a megfelelő összefüggéseket $A_2$-re és $B_2$-re is:

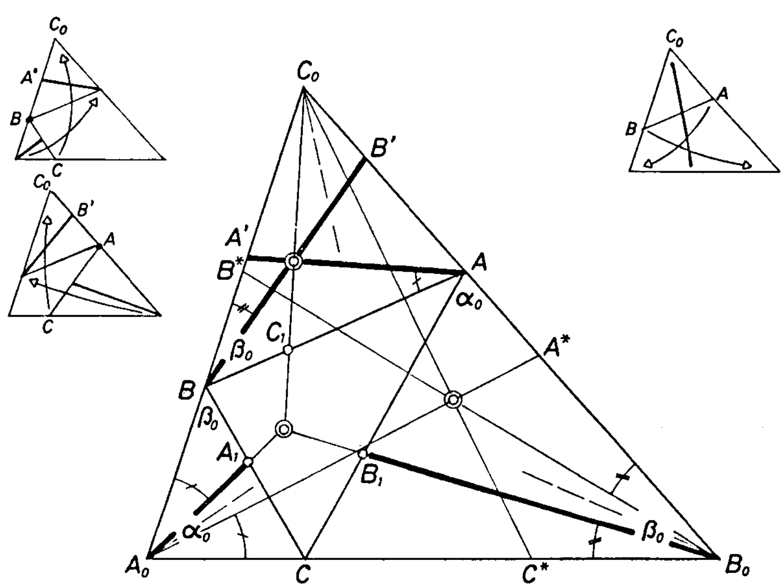
$$\frac{B_0A_2}{A_2C_0} = \frac{KC}{KB} \left(\frac{A_0B_0}{A_0C_0}\right)^2, \qquad \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = \frac{KA}{KC} \left(\frac{B_0C_0}{B_0A_0}\right)^2.$$

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeszorozva a jobb oldalon 1-et kapunk, tehát

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} \cdot \frac{B_0A_2}{A_2C_0} \cdot \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = 1.$$

Mivel $A_1$, $B_1$, $C_1$ az $ABC$ háromszög megfelelő oldalának belső pontja, így az $A_0A_1$, $B_0B_1$, $C_0C_1$ egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, tehát Ceva tétele szerint egy ponton mennek keresztül.

**III. megoldás:** Az előző megoldás jelöléseit használva az ott követett gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy $B_0AC\sphericalangle = \alpha_0$ és $A_0BC\sphericalangle = \beta_0$. Így az $A_0BC$, $AB_0C$, $ABC_0$ és $A_0B_0C_0$ háromszög hasonló. Az elsőt és a másodikat a harmadikba egy $B$, illetőleg $A$ körüli forgatás és ugyanezen középpontú alkalmas hasonlósági transzformáció viszi át, a harmadikat a negyedikbe pedig egy tükrözés a $C_0$-ból induló (belső) szögfelezőre és $C_0$ középpontú hasonlósági transzformáció. Mindezek a transzformációk a szakaszok arányát és a szögek nagyságát változatlanul hagyják.




*7. ábra*

Vigye át az első és a második transzformáció $A_0A_1$-et és $B_0B_1$-et $AA'$-be, illetőleg $BB'$-be *(7. ábra)*. Ekkor

$$\frac{BA'}{A'C_0} = \frac{BA_1}{A_1C}, \qquad \frac{C_0B'}{B'A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

A megfelelő oldalakat összeszorozva és szorozva még mindkét oldalt az $AC_1/C_1B$ aránnyal, a jobb oldalon keletkező tört a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel szerint 1 lesz, ez pedig Ceva tétele szerint azt jelenti, hogy az $AA'$, $BB'$ és $C_0C_1$ egyenesek egy ponton mennek keresztül.

A föntebb említett harmadik transzformáció ezeket az egyeneseket az ugyancsak egy ponton átmenő $A_0A^\star$, $B_0B^\star$, $C_0C^\star$ egyenesekbe viszi át. Ezek közül az utolsó egyenes a $C_0C_1$ egyenes tükörképe a $C_0$-ból induló szögfelezőre. Hasonló igaz azonban a másik két egyenesre is. Ugyanis a transzformáció például a $BAA'$ szöget a $B_0A_0A^\star$ szögbe viszi át, viszont az első transzformáció révén az előbbi szögbe a $BA_0A_1\sphericalangle = C_0A_0A_1\sphericalangle$ megy át, ami éppen azt jelenti, hogy $A_0A_1$ és $A_0A^\star$ egymás tükörképe az $A_0$-ból induló szögfelezőre nézve. Hasonlóan okoskodhatunk a harmadik egyenes esetében is. Ekkor azonban $A_0A_1$, $B_0B_1$, $C_0C_1$ is egy ponton megy keresztül, mint egy ponton átmenő egyeneseknek a megfelelő szögfelezőkre vonatkozó tükörképei.

**3.** 100 *gyerek között egy nem szabályos érme többszöri feldobásával szeretnénk egy ajándékot kisorsolni. A pénzdarabot $k$-szor feldobjuk, miután a dobássorozat minden egyes kimenetelére meghatároztuk, hogy az adott esetben ki nyer.*

*Bizonyítsuk be, hogy a „fej” dobás $p$ valószínűségét és a $k$ értékét alkalmasan megválasztva a $2^k$ kimenetelt fel lehet osztani a gyerekek közt úgy, hogy mindenki egyforma valószínűséggel nyerjen.*

**I. megoldás:** Az alapgondolat az, hogy egy $G$ gyereket különválasztva, az azonos számú fejet tartalmazó kimenetelekből annyit, amennyit lehet, egyenletesen szétosztunk a többi gyerek közt, majd a fennmaradó sorozatokat $G$-nek adjuk. Ezután elég $p$-t úgy választani meg, hogy $G$ nyerési esélye $1/100$ legyen, mivel a többi között egyenletesen oszlik meg a maradó $99/100$ valószínűség. Azt kell bizonyítani, hogy alkalmas $k$ esetén ez lehetséges.

Száz gyerek esetén ez kiegészíthető azzal a gondolattal, hogy elég a feladatot száz helyett tízre megoldani. Ha ugyanis tíz gyerek esetén van alkalmas $p$, $k$ és a kimenetelek egy alkalmas szétosztása, akkor a száz gyereket tízes csoportokba osztjuk, és először egy csoportot sorsolunk ki módszerünkkel, majd a csoport tagjai közt sorsoljuk ki az ajándékot.

Jegyezzük még meg, hogy ha valaki a „fej”-et tekintené „írás”-nak, természetesen akkor is megfelelő maradna az érme, ami azt jelenti, hogy egy $p$ értékkel együtt $1-p$ is megoldása a feladatnak. Ez azt sugallja, hogy kényelmesebb $p$-t $\dfrac{1}{2}-r$ alakban keresni; így $1-p=\dfrac{1}{2}+r$.

Próbálkozzunk kilenc dobással. Ekkor a 0, 1, …, 9 fejet tartalmazó dobássorozatok száma sorra 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1. Ezekből az első 9 gyerek közt szétosztva amennyit lehet, csak a 0, a 3, a 6 és a 9 fejet tartalmazó sorozatokból marad a tizedik gyereknek rendre 1, 3, 3, 1. Egy-egy ilyen dobássorozat rendre $\left(\dfrac{1}{2}+r\right)^9$, $\left(\dfrac{1}{2}+r\right)^6\left(\dfrac{1}{2}-r\right)^3$, $\left(\dfrac{1}{2}+r\right)^3\left(\dfrac{1}{2}-r\right)^6$, $\left(\dfrac{1}{2}-r\right)^9$ valószínűséggel következik be. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^9+3\left(\frac{1}{2}-r\right)^6\left(\frac{1}{2}+r\right)^3+3\left(\frac{1}{2}-r\right)^3\left(\frac{1}{2}+r\right)^6+\left(\frac{1}{2}+r\right)^9=\frac{1}{10}.$$

A bal oldalon

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^3+\left(\frac{1}{2}+r\right)^3=\frac{1}{4}+3r^2$$

köbe áll, így az egyenlet pozitív gyökét keresve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}+3r^2=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}, \qquad r=\sqrt{(4-\sqrt[3]{10})/12\sqrt[3]{10}}.$$

Innen – 6 értékes tizedesjeggyel számolva – azt kapjuk, hogy a feladat 10 gyerek esetén $k=9$, $p=0{,}232\,818$ választással megoldható.

*Megjegyzések:* 1. Az első kilenc gyerek egyenként 56 kimenetel esetén nyer, a tizedik összesen 8 esetben, az ezek valamelyike bekövetkezésének a valószínűsége lesz mindegyikük számára egyenlő.

2. A feladat száz gyerek esetén kérdezi az alkalmas dobásszámot és valószínűséget. Erre úgy felelhetünk, hogy mindegyik tízes csoportban előre kiosztjuk azokat a kimeneteleket is, amelyekkel a második fordulóban nyernek, amennyiben az első fordulóból az ő csoportjuk jut tovább. Az egyes gyerekek nyerő kimenetelsorozatai most már úgy adódnak, hogy az első sorozat minden kimeneteléhez hozzáírjuk a második fordulóban rájuk kedvező kimenetelek mindegyikét. Így száz gyerek esetére $p$ változatlan, $k=18$, és lesz, akire $56\cdot 56=3136$ kimenetel jut, lesz akire $8\cdot 56=448$, egy gyerekre pedig mindössze $8\cdot 8=64$.

**II. megoldás:** Megmutatjuk, hogy a feladat 100 helyett tetszés szerinti $n$-re megoldható a fenti módszerrel. Hagyjuk $k$ értékét egyelőre határozatlanul. A $j$ fejet tartalmazó sorozatokból az első $n-1$ gyerek mindegyikének ugyanannyit adva, jelöljük $c_j$-vel az $n$-edik gyereknek maradó sorozatok számát. Nyilván $c_0 = c_k = 1$. A többi indexre $0 \leqq c_j \leqq n-2$. Mivel egy ilyen sorozat bekövetkezésének a valószínűsége $p^j(1-p)^{k-j}$, így a következő egyenletre jutunk:

$$p^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_j p^j (1-p)^{k-j} + (1-p)^k = \frac{1}{n}\,.$$

Belátjuk, hogy ha $k$ elég nagy, akkor az egyenletnek van 0 és 1 közé eső megoldása. A bal oldal $p$-nek az egész számegyenesen értelmezett és folytonos $f(p)$ függvényét állítja elő, így elég belátni, hogy van olyan hely, ahol $1/n$-nél nagyobb értéket vesz fel, és olyan is, ahol kisebbet, mert folytonos függvény a két hely között felvesz a két érték közötti minden értéket.

$$f(1) = 1 > \frac{1}{n}\,.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(2 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k [2 + (k-1)(n-2)] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (k-1)(n-1),$$

ha $k$ legalább 3. Létezik tehát $k$-hoz megfelelő $p$, ha az utolsó kifejezés nem nagyobb, mint $1/n$, azaz

$$n(n-1) \leqq \frac{2^k}{k-1}\,.$$

A jobb oldali kifejezés $k$ növekedtével minden határon túl nő, tehát minden $n$-hez választható alkalmas $k$ és $p$ érték.

$$n = 100 \quad \text{esetén} \quad 2^{18}/17 = 262\,144/17 > 15\,420 > 9900,$$

tehát választható $p$ úgy, hogy 18 dobásból álló sorozattal igazságosan ki lehessen sorsolni az ajándékot.

*Megjegyzés.* Csak véletlen egyezés, hogy az I. megoldás szerint is 18 feldobással történhet a sorsolás. A II. megoldásnál a $c_j$ együtthatók kiszámításával belátható, hogy már 16 dobásból álló sorozathoz is van alkalmas $p$ érték.