1. *Legyen p páratlan prímszám, n pedig pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy pn^2-nek legfeljebb egy olyan d pozitív osztója van, amelyikre $d+n^2$ négyzetszám.*

I. megoldás: A számelmélet alaptétele értelmében d prímszámhatványok szorzatára történő felbontásában csak azok a prímszámok szerepelhetnek, amelyek pn^2 felbontásában szerepelnek, és legfeljebb akkora kitevőn, mint az utóbbi felbontásban. Így két esetet különböztethetünk meg. Ha p nem szerepel d felbontásában, akkor d osztója n^2-nek is, ha pedig szerepel, akkor $d = pd'$, ahol d' osztója n^2-nek.

Feltétel szerint van olyan m pozitív egész, amelyre az első esetben

$$d + n^2 = m^2, \quad \text{a másodikban} \quad pd' + n^2 = m^2.$$

Véve d, illetőleg d' egy tetszés szerinti q prím osztóját, azzal n^2 és m^2 is osztható. Mivel a prímtényezős felbontás lényegében egyértelmű, ez csak úgy lehetséges, ha az alapok is oszthatók q-val, és így n^2 és m^2 osztható q^2-tel.

Ekkor d, illetőleg d' is osztható q^2-tel, kivéve a második esetben, ha $q = p$. Az említett eset kivételével tehát egyszerűsíthetünk q^2-tel, és

$$d^* + n'^2 = m'^2, \quad \text{illetőleg} \quad pd^* + n'^2 = m'^2$$

alakú összefüggésekhez jutunk, ahol d^* osztója n'^2-nek.

Ha a második esetben $q = p$, akkor is oszthatunk q^2-tel, csak akkor a fenti első típusú egyenlethez jutunk, ahol d^* most is osztója lesz n'^2-nek.

Az eljárást megismételhetjük sorra d^* minden prím osztójára, és így azt kapjuk, hogy van olyan pozitív egész n_1 és m_1, amelyekkel fennáll, hogy

$$1 + {n_1}^2 = {m_1}^2 \quad \text{vagy} \quad p + {n_1}^2 = {m_1}^2. \tag{1}$$

Az eljárás során minden lépésben n egy q prím osztójának a négyzetével egyszerűsítettünk, tehát végül is egy olyan ${n_2}^2$ egésszel, amelyikre

$$n = n_1 n_2 \quad \text{és} \quad d = {n_2}^2, \quad \text{illetőleg} \quad d = p{n_2}^2.$$

Az (1) alatti első egyenlet nem állhat fenn, mert két pozitív négyzetszám különbsége legalább 3. A második egyenlőségből

$$p = (m_1 + n_1)(m_1 - n_1).$$

Mivel p prímszám, így ebből

$$m_1 + n_1 = p, \quad m_1 - n_1 = 1, \quad \text{tehát} \quad 2n_1 = p - 1.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a feladat feltételei akkor teljesülhetnek, ha

$$n = \frac{1}{2}(p-1)n_2 \quad \text{és} \quad d = p{n_2}^2.$$

Ezekre

$$d + n^2 = \left\{p + \left[\frac{1}{2}(p-1)\right]^2\right\} n_2^2 = \left[\frac{1}{2}(p+1)\right]^2 n_2^2 = \left[\frac{1}{2}(p+1)n_2\right]^2$$

valóban négyzetszám.

Eszerint valóban legfeljebb egy megfelelő d van, éspedig akkor van ilyen, ha n osztható $\frac{1}{2}(p-1)$-gyel.

Megjegyzés: Nem használtuk ki a megoldás során, hogy p páratlan, viszont $p = 2$ esetben az (1) alatti második egyenlőség sem állhat fenn, tehát nincs a feladat feltételeit kielégítő d szám. Ennek bizonyítását kívánta az 1953. évi verseny 2. feladata.[1]

Valamivel rövidebb megoldást kapunk, ha felhasználjuk az úgynevezett eukleidészi lemmát, amelyik szerint ha egy szám osztója egy szorzatnak, de relatív prím az egyik tényezőhöz, akkor osztója a másik tényezőnek.

II. megoldás: Feltétel szerint van olyan k és m egész, amelyekre

$$pn^2 = dk \quad \text{és} \quad d + n^2 = m^2.$$

Jelöljük n és m legnagyobb közös osztóját d'-vel. Ekkor $n = d'n'$, $m = d'm'$, ahol m' és n' egymáshoz relatív prím.

A fenti második egyenlőséget k-val végigszorozva és felhasználva az elsőt és az utolsó két egyenlőséget, az előbbi így írható:

$$(p+k)d'^2n'^2 = kd'^2m'^2, \quad \text{amiből} \quad (p+k)n'^2 = km'^2.$$

A prímtényezős felbontás egyértelműsége folytán m'^2-nek és n'^2-nek csak olyan prímek lehetnek osztói, és így közös osztói is, amelyek az alapoknak is osztói, ami esetünkben azt jelenti, hogy a két négyzet relatív prím. Az eukleidészi

[1] Lásd, Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.: *Matematikai versenytételek II. köt.*, 3. kiad., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. 157-158.old.

lemma szerint tehát n'^2, ami osztója a jobb oldalnak, kell, hogy az első tényezőnek legyen osztója. Alkalmas k' egésszel tehát

$$k = n'^2 k'.$$

Ezt beírva utolsó egyenlőségünkbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$p + n'^2 k' = k' m'^2,$$

vagy átrendezve

$$p = k'(m'^2 - n'^2) = k'(m' - n')(m' + n').$$

Mivel p (pozitív) osztói csak 1 és p, így a jobb oldalon egy tényező értéke p, a másik kettőé 1, és mivel az utolsó tényező nagyobb az előtte állónál, így

$$m' + n' = p, \quad k' = m' - n' = 1, \quad \text{tehát} \quad n' = \frac{1}{2}(p-1), \quad n = \frac{1}{2}(p-1)d'.$$

Mindezeket beírva az első feltételi egyenlőségbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$d = pd'^2,$$

tehát p és n meghatározza d-t – feltéve, hogy egyáltalán létezik megfelelő d; ennek pedig az a feltétele, hogy n osztható legyen $\frac{1}{2}(p-1)$-gyel.

III. megoldás: Legyen m olyan egész szám, amelyikre $d + n^2 = m^2$, azaz

$$d = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

Jelöljük $m+n$ és $m-n$ legnagyobb közös osztóját d'-vel. Ekkor alkalmas b és c egészekkel

$$m + n = bd', \qquad m - n = cd',$$

ahol b és c relatív prím egymáshoz, $b > c$ és

$$d = bcd'^2, \qquad 2n = (b-c)d'.$$

Az, hogy d osztója pn^2-nek, azt jelenti, hogy van olyan k egész, amellyel

$$pn^2 = dk,$$

vagyis 4-gyel szorozva és a fent találtakat beírva

$$p(b-c)^2 d'^2 = 4bcd'^2 k, \quad \text{amiből} \quad p(b-c)^2 = 4bck.$$

Mivel b-nek és c-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, így b-nek és c-nek $b-c$-vel sem lehet 1-nél nagyobb közös osztója. Ekkor azonban mind a kettő p-nek kell, hogy osztója legyen, tehát

$$b = p, \quad c = 1, \quad \text{így} \quad k = \left[\frac{1}{2}(p-1)\right]^2, \quad d' = \frac{2n}{p-1};$$

ezekből pedig

$$d = p\left(\frac{2n}{p-1}\right)^2.$$

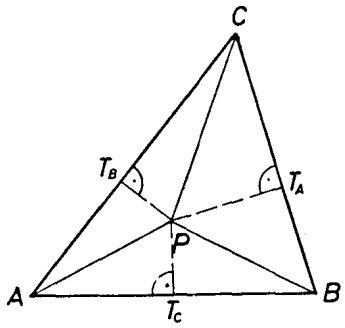
Ezzel azt kaptuk, hogy p és n már meghatározza d-t. Egyben azt is kaptuk, hogy ilyen d akkor van, ha n az $\frac{1}{2}(p-1)$ többszöröse.

Megjegyzések: 1. Ha $p = 2$, akkor csak annyi változik, hogy $\frac{1}{2}(p-1)$ nem egész, s így semmilyen n-hez nincs megfelelő d.

2. Mind a három megoldás módot ad az alkalmas d osztók megkeresésére akkor is, ha p helyébe tetszés szerinti összetett számot írunk. Ekkor lehet több ilyen d is.

2. *Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen K, a hozzáírt körök középpontjai A_0, B_0, C_0. Jelölje A_1 a BC oldal és a BKC szög felezőjének, B_1 az AC oldal és az AKC szög felezőjének, C_1 pedig az AB oldal és az AKB szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át.*

I. megoldás: A megoldást a következő megjegyzésre építjük. Egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldal egy pontjával összekötő szakaszhoz egyértelműen tartozik egy arányszám, amelyikre igaz, hogy egy pont akkor és csak akkor pontja a szakasznak, ha a pont és a szakasszal közös csúcsból induló oldalak távolságainak az aránya az adott érték.



1. ábra

Ha az ABC háromszög egy P pontjának merőleges vetülete a BC, CA és AB oldalon rendre T_A, T_B és T_C (*1. ábra*), akkor az AP, BP, CP egyenesekhez (ill. a háromszögbe eső szakaszaikhoz) tartozó arányok

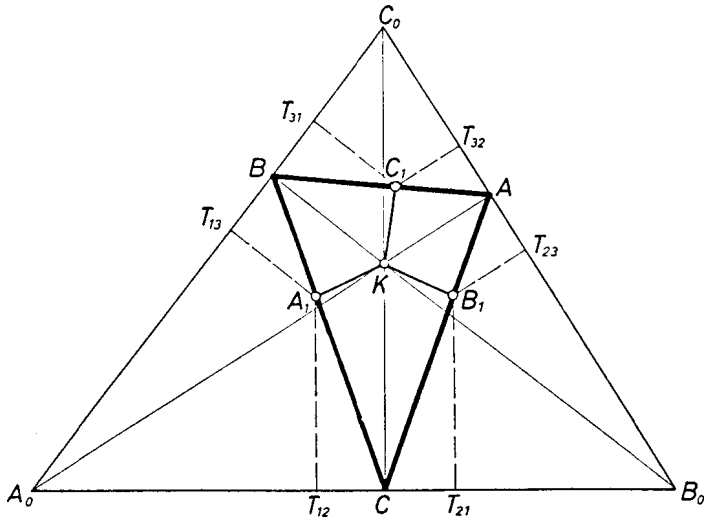
$$r_A = PT_B : PT_C, \quad r_B = PT_C : PT_A, \quad r_C = PT_A : PT_B,$$

és így

$$r_A r_B r_C = 1. \tag{2}$$

Ha fordítva, P egy az A csúcson és egy a B csúcson átmenő egyenes metszéspontja, akkor a két egyeneshez tartozó arány a fenti r_A és r_B érték. Ha fennáll (2), akkor r_C is a fenti érték, s így a C ponton átmenő egyenes is átmegy P-n.

Más szóval, *ha az A,B, C csúcson átmenő egy-egy egyenesszakaszhoz tartozó arány r_A, r_B, r_C, akkor a szakaszok akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha teljesül* (2).



2. ábra

A feladatra térve A_0, B_0, C_0 a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalaira esnek (*2. ábra*). Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val; A_1 merőleges vetületét az A_0B_0, A_0C_0 oldalon T_{12}-vel, illetőleg T_{13}-mal, és megfelelően a másik két pont vetületeit, amint az ábra mutatja. Ekkor az A_0A_1 egyenesre vonatkozó arány az $A_0B_0C_0$ háromszögben

$$r_a = \frac{A_1T_{12}}{A_1T_{13}} = \frac{A_1C \sin BCA_0}{A_1B \sin CBA_0} = \frac{A_1C \cos\frac{\gamma}{2}}{A_1B \cos\frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan

$$r_B = \frac{B_1A \cos\frac{\alpha}{2}}{B_1C \cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad r_C = \frac{C_1B \cos\frac{\beta}{2}}{C_1A \cos\frac{\alpha}{2}},$$

és a három arány szorzata

$$\frac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

Tudjuk azonban, hogy a háromszög egy szögének a felezője a szemközti oldalt olyan szakaszokra osztja, amelyeknek az aránya megegyezik a mellettük fekvő oldalak arányával. Ezt egymás után CKB, AKC, majd a BKA háromszögekre alkalmazva.

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \qquad \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AK}{CK}, \qquad \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{BK}{AK}.$$

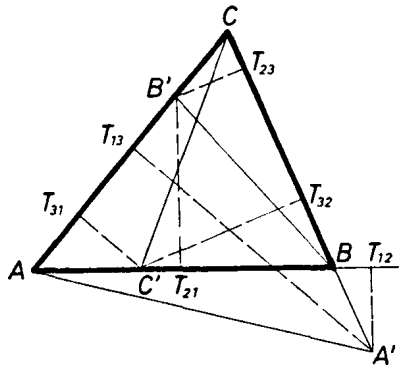
Ezek figyelembevételével azt kapjuk, hogy a fenti szorzat értéke 1, tehát az előrebocsátott megjegyzés értelmében a három egyenes egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. A K pontról csak annyit használtunk fel, hogy az ABC háromszögben van, így a feladat állítása a háromszög bármely K pontjára igaz.

2. A bevezető megjegyzésben a háromszög pontjaira szorítkoztunk. Ettől a megszorítástól azonban megszabadulhatunk, ha a háromszög oldalaitól mért távolságot előjelesen értjük: pozitívnak tekintjük azokra a pontokra, amelyek az oldalnak a háromszöget tartalmazó partján vannak, és negatívnak a másik félsík pontjaira. Ekkor csak a háromszög oldalegyeneseit célszerű kizárni.

3. Megvizsgáljuk most a kérdést ennek megfelelően tekintetbe véve az egész síkot. Legyen az ABC háromszög BC oldalának egy pontja A', merőleges vetülete az AB és AC oldalon T_{12} és T_{13} (*3. ábra*). Ekkor – a háromszög szögeit a szokásos módon jelölve – az AA' egyenest jellemző arány

$$r_A = \frac{A'T_{12}}{A'T_{13}} = \frac{BA' \sin\beta}{A'C \sin\gamma}.$$



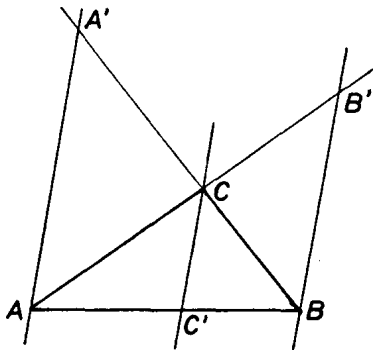
3. ábra

Ha B' és C' a CA, illetőleg az AB oldal egy-egy pontja, és felírjuk hasonló módon a BB' és a CC' egyenesre vonatkozó r_B és r_C arányt is, akkor a jobb oldalak szorzatában a számlálóban is, a nevezőben is ugyanaz a szinuszszorzat lép fel, így azzal egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a (2) bal oldalán álló szorzat a következővel egyenlő:

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B}. \tag{3}$$

Az is látható, hogy a felírt arányegyenlőségek előjelet tekintve is helyesek maradnak, ha az oldalegyeneseken egy-egy irányt pozitívnak, az ellentéteset negatívnak tekintve előjeles szakaszokkal számolunk, és az egyenesektől mért távolságot is előjelezve értjük a korábban mondott módon. Irányítsuk az oldalegyeneseket például a háromszög óramutatóval ellentétes irányú körüljárásának megfelelően.

Az továbbra is fennáll, hogy ha az AA', BB', CC' egyenes egy ponton megy keresztül, akkor a (2) szorzat értéke, és így a (3) arányé is 1. A megfordítás helyességének igazolásánál a háromszögben futó két szakasz metszéspontjából indultunk ki. Most azonban felléphetnek párhuzamos egyenesek is.



4. ábra

Ha a három egyenes párhuzamos, válasszuk a betűzést úgy, hogy a C csúcs a másik kettőn át húzott párhuzamosok közé essék (*4. ábra*). Ekkor alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ABA' és a BAB' szögeket átmetsző párhuzamosokra:

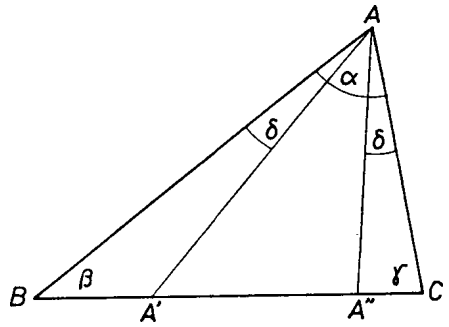
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC'}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{C'B}{BA}.$$

Ezeket a (3) törtbe helyettesítve kapjuk, hogy annak az értéke akkor is 1, ha a három egyenes párhuzamos.

Megfordítva, ha AA' és BB' párhuzamos, akkor CC' nem metszheti őket, mert ha metszené, akkor korábbi meggondolásunk szerint BB' és CC' metszéspontján kellene átmennie AA'-nek is.

Azt kaptuk tehát, hogy *véve az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesének egy-egy, a csúcsoktól különböző A', B', C' pontját, az AA', BB' és CC' egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak akkor és csak akkor, ha a* (3) *arány értéke* 1. Ez Ceva tétele. Ezt a versenyzők nagy része ismerte és felhasználta megoldásában.

4. Többen ismerték és felhasználták azt is, hogy *ha a háromszög egy-egy csúcsán átmenő három egyenes egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak az egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a megfelelő szögfelezőre, akkor a tükrözött egyenesek is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.*



5. ábra

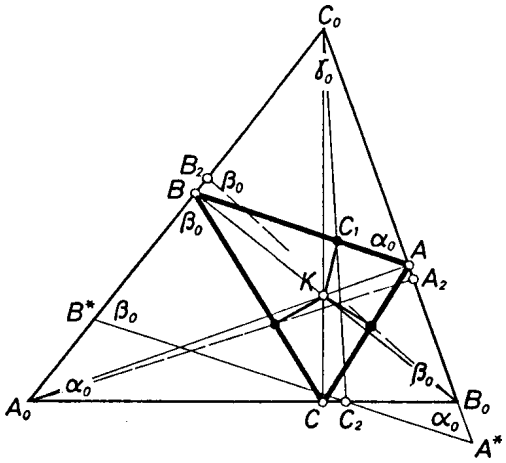
Valóban, legyen A' a BC egyenes egy pontja, és messe az AA' egyenesnek az A csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe a BC egyenest az A'' pontban. A $BAA'\sphericalangle = \delta$ jelöléssel, mivel a szögfelezőre tükrözünk, $CAA''\sphericalangle = \delta$ (*5. ábra*). Felhasználva a szinusztételt az $AA'B$, $AA'C$, $AA''B$, $AA''C$ háromszögekre

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA'/A'A}{A'C/A'A} = \frac{\sin\delta/\sin\beta}{\sin(\alpha-\delta)/\sin\gamma} = \frac{\sin\delta\sin\gamma}{\sin(\alpha-\delta)\sin\beta},$$

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA''/A''A}{A''C/A''A} = \frac{\sin(\alpha-\delta)/\sin\beta}{\sin\delta/\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\delta)\sin\gamma}{\sin\delta\sin\beta} = \frac{A'C\sin^2\gamma}{BA'\sin^2\beta}.$$

Felírva a megfelelő arányokat a BB' és a CC' tükörképének metszéspontjaként keletkező B'' és C'' pontokra is és összeszorozva őket, a számlálóban is, a nevezőben is a háromszög három szöge szinusza négyzetének szorzata keletkezik, így ezzel egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a kétvesszős pontokra felírt (3)-nak megfelelő kifejezés a vesszős pontokra felírtnak a reciprok értéke. Így Ceva tételéből következik a kimondott állítás helyessége.

II. megoldás: Jelöljük az $A_0B_0C_0$ háromszög szögeit rendre α_0, β_0, γ_0-val; az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesnek és az $A_0B_0C_0$ háromszög szemközti oldalának a metszéspontját A_2, B_2, C_2-vel; húzzunk továbbá C_2-n át párhuzamost a BA egyenessel, messe ez a C_0A_0, C_0B_0 egyenest a $B^\star$, illetőleg $A^\star$ pontban *(6. ábra)*.



6. ábra

A háromszöghöz hozzáírt körök középpontjai a háromszög két-két külső és egy belső szögfelezőjének a metszéspontjai, továbbá az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalain feküsznek, a háromszög magasságainak talppontjai. Ennek folytán A_0BAB_0 húrnégyszög, tehát

$$C_0BA\sphericalangle = \beta_0, \qquad C_0AB\sphericalangle = \alpha_0;$$

a szerkesztés szerint pedig

$$C_0A^\star B^\star \sphericalangle = C_0AB\sphericalangle = \alpha_0, \qquad C_0B^\star A^\star \sphericalangle = C_0BA\sphericalangle = \beta_0.$$

Eszerint $A_0B^\star B_0A^\star$ húrnégyszög, mert $B^\star B_0$ az A_0 és az $A^\star$ pontból ugyanakkora szögben látszik. Ekkor a C_2-n átmenő szelők szeleteinek szorzata egyenlő:

$$A_0C_2 \cdot C_2B_0 = B^\star C_2 \cdot C_2A^\star.$$

Ez átrendezhető így:

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{B^\star C_2}{C_2A^\star}\left(\frac{C_2A^\star}{C_2B_0}\right)^2.$$

A jobb oldalt átalakítjuk. A párhuzamos szelők tétele, továbbá a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel alapján

$$\frac{B^\star C_2}{C_2A^\star} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{KA}.$$

A második tényezőben az alap így alakítható át, a szinusztételt először az $A^\star B_0C_2$ háromszögre, majd ellenkező irányban az $A_0B_0C_0$ háromszögre alkalmazva:

$$\frac{C_2A^\star}{C_2B_0} = \frac{\sin(180^\circ - \beta_0)}{\sin\alpha_0} = \frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_0} = \frac{C_0A_0}{C_0B_0}.$$

Ezek szerint

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{KB}{KA}\left(\frac{C_0A_0}{C_0B_0}\right)^2.$$

Írjuk fel a megfelelő összefüggéseket A_2-re és B_2-re is:

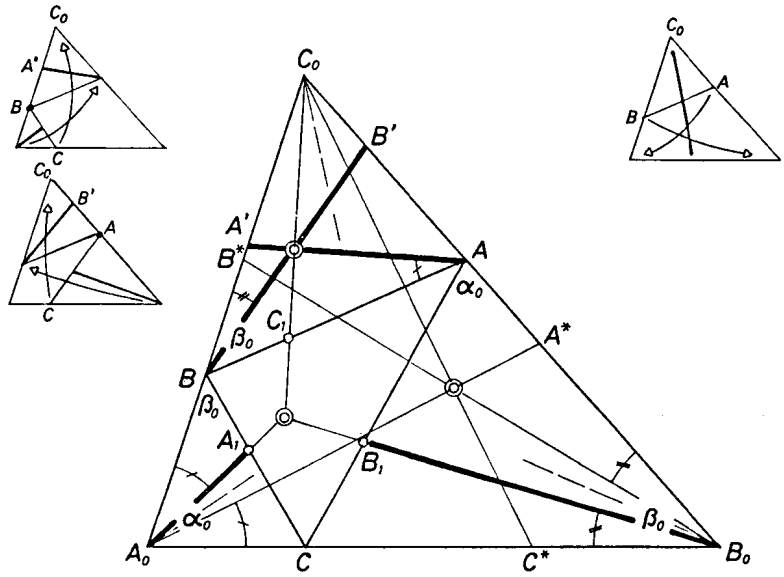
$$\frac{B_0A_2}{A_2C_0} = \frac{KC}{KB}\left(\frac{A_0B_0}{A_0C_0}\right)^2, \qquad \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = \frac{KA}{KC}\left(\frac{B_0C_0}{B_0A_0}\right)^2.$$

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeszorozva a jobb oldalon 1-et kapunk, tehát

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} \cdot \frac{B_0A_2}{A_2C_0} \cdot \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = 1.$$

Mivel A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög megfelelő oldalának belső pontja, így az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, tehát Ceva tétele szerint egy ponton mennek keresztül.

III. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva az ott követett gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy $B_0AC\sphericalangle = \alpha_0$ és $A_0BC\sphericalangle = \beta_0$. Így az A_0BC, AB_0C, ABC_0 és $A_0B_0C_0$ háromszög hasonló. Az elsőt és a másodikat a harmadikba egy B, illetőleg A körüli forgatás és ugyanezen középpontú alkalmas hasonlósági transzformáció viszi át, a harmadikat a negyedikbe pedig egy tükrözés a C_0-ból induló (belső) szögfelezőre és C_0 középpontú hasonlósági transzformáció. Mindezek a transzformációk a szakaszok arányát és a szögek nagyságát változatlanul hagyják.



7. ábra

Vigye át az első és a második transzformáció A_0A_1-et és B_0B_1-et AA'-be, illetőleg BB'-be *(7. ábra)*. Ekkor

$$\frac{BA'}{A'C_0} = \frac{BA_1}{A_1C}, \qquad \frac{C_0B'}{B'A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

A megfelelő oldalakat összeszorozva és szorozva még mindkét oldalt az AC_1/C_1B aránnyal, a jobb oldalon keletkező tört a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel szerint 1 lesz, ez pedig Ceva tétele szerint azt jelenti, hogy az AA', BB' és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek keresztül.

A föntebb említett harmadik transzformáció ezeket az egyeneseket az ugyancsak egy ponton átmenő $A_0A^\star$, $B_0B^\star$, $C_0C^\star$ egyenesekbe viszi át. Ezek közül az utolsó egyenes a C_0C_1 egyenes tükörképe a C_0-ból induló szögfelezőre. Hasonló igaz azonban a másik két egyenesre is. Ugyanis a transzformáció például a BAA' szöget a $B_0A_0A^\star$ szögbe viszi át, viszont az első transzformáció révén az előbbi szögbe a $BA_0A_1\sphericalangle = C_0A_0A_1\sphericalangle$ megy át, ami éppen azt jelenti, hogy A_0A_1 és $A_0A^\star$ egymás tükörképe az A_0-ból induló szögfelezőre nézve. Hasonlóan okoskodhatunk a harmadik egyenes esetében is. Ekkor azonban A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 is egy ponton megy keresztül, mint egy ponton átmenő egyeneseknek a megfelelő szögfelezőkre vonatkozó tükörképei.

3. 100 *gyerek között egy nem szabályos érme többszöri feldobásával szeretnénk egy ajándékot kisorsolni. A pénzdarabot k-szor feldobjuk, miután a dobássorozat minden egyes kimenetelére meghatároztuk, hogy az adott esetben ki nyer.*

Bizonyítsuk be, hogy a „fej" dobás p valószínűségét és a k értékét alkalmasan megválasztva a 2^k kimenetelt fel lehet osztani a gyerekek közt úgy, hogy mindenki egyforma valószínűséggel nyerjen.

I. megoldás: Az alapgondolat az, hogy egy G gyereket különválasztva, az azonos számú fejet tartalmazó kimenetelekből annyit, amennyit lehet, egyenletesen szétosztunk a többi gyerek közt, majd a fennmaradó sorozatokat G-nek adjuk. Ezután elég p-t úgy választani meg, hogy G nyerési esélye $1/100$ legyen, mivel a többi között egyenletesen oszlik meg a maradó $99/100$ valószínűség. Azt kell bizonyítani, hogy alkalmas k esetén ez lehetséges.

Száz gyerek esetén ez kiegészíthető azzal a gondolattal, hogy elég a feladatot száz helyett tízre megoldani. Ha ugyanis tíz gyerek esetén van alkalmas p, k és a kimenetelek egy alkalmas szétosztása, akkor a száz gyereket tízes csoportokba osztjuk, és először egy csoportot sorsolunk ki módszerünkkel, majd a csoport tagjai közt sorsoljuk ki az ajándékot.

Jegyezzük még meg, hogy ha valaki a „fej"-et tekintené „írás"-nak, természetesen akkor is megfelelő maradna az érme, ami azt jelenti, hogy egy p értékkel együtt $1-p$ is megoldása a feladatnak. Ez azt sugallja, hogy kényelmesebb p-t $\frac{1}{2}-r$ alakban keresni; így $1-p=\frac{1}{2}+r$.

Próbálkozzunk kilenc dobással. Ekkor a 0, 1, …, 9 fejet tartalmazó dobássorozatok száma sorra 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1. Ezekből az első 9 gyerek közt szétosztva amennyit lehet, csak a 0, a 3, a 6 és a 9 fejet tartalmazó sorozatokból marad a tizedik gyereknek rendre 1, 3, 3, 1. Egy-egy ilyen dobássorozat rendre $\left(\frac{1}{2}+r\right)^9$, $\left(\frac{1}{2}+r\right)^6\left(\frac{1}{2}-r\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}+r\right)^3\left(\frac{1}{2}-r\right)^6$, $\left(\frac{1}{2}-r\right)^9$ valószínűséggel következik be. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^9 + 3\left(\frac{1}{2}-r\right)^6\left(\frac{1}{2}+r\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}-r\right)^3\left(\frac{1}{2}+r\right)^6 + \left(\frac{1}{2}+r\right)^9 = \frac{1}{10}\,.$$

A bal oldalon

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^3 + \left(\frac{1}{2}+r\right)^3 = \frac{1}{4}+3r^2$$

köbe áll, így az egyenlet pozitív gyökét keresve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}+3r^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}, \qquad r = \sqrt{(4-\sqrt[3]{10})/12\sqrt[3]{10}}\,.$$

Innen – 6 értékes tizedesjeggyel számolva – azt kapjuk, hogy a feladat 10 gyerek esetén $k=9$, $p=0{,}232\,818$ választással megoldható.

Megjegyzések: 1. Az első kilenc gyerek egyenként 56 kimenetel esetén nyer, a tizedik összesen 8 esetben, az ezek valamelyike bekövetkezésének a valószínűsége lesz mindegyikük számára egyenlő.

2. A feladat száz gyerek esetén kérdezi az alkalmas dobásszámot és valószínűséget. Erre úgy felelhetünk, hogy mindegyik tízes csoportban előre kiosztjuk azokat a kimeneteleket is, amelyekkel a második fordulóban nyernek, amennyiben az első fordulóból az ő csoportjuk jut tovább. Az egyes gyerekek nyerő kimenetelsorozatai most már úgy adódnak, hogy az első sorozat minden kimeneteléhez hozzáírjuk a második fordulóban rájuk kedvező kimenetelek mindegyikét. Így száz gyerek esetére p változatlan, $k=18$, és lesz, akire $56\cdot 56=3136$ kimenetel jut, lesz akire $8\cdot 56=448$, egy gyerekre pedig mindössze $8\cdot 8=64$.

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy a feladat 100 helyett tetszés szerinti n-re megoldható a fenti módszerrel. Hagyjuk k értékét egyelőre határozatlanul. A j fejet tartalmazó sorozatokból az első $n-1$ gyerek mindegyikének ugyanannyit adva, jelöljük c_j-vel az n-edik gyereknek maradó sorozatok számát. Nyilván $c_0 = c_k = 1$. A többi indexre $0 \leqq c_j \leqq n-2$. Mivel egy ilyen sorozat bekövetkezésének a valószínűsége $p^j(1-p)^{k-j}$, így a következő egyenletre jutunk:

$$p^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_j p^j (1-p)^{k-j} + (1-p)^k = \frac{1}{n}\,.$$

Belátjuk, hogy ha k elég nagy, akkor az egyenletnek van 0 és 1 közé eső megoldása. A bal oldal p-nek az egész számegyenesen értelmezett és folytonos $f(p)$ függvényét állítja elő, így elég belátni, hogy van olyan hely, ahol $1/n$-nél nagyobb értéket vesz fel, és olyan is, ahol kisebbet, mert folytonos függvény a két hely között felvesz a két érték közötti minden értéket.

$$f(1) = 1 > \frac{1}{n}\,.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(2 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k [2 + (k-1)(n-2)] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (k-1)(n-1),$$

ha k legalább 3. Létezik tehát k-hoz megfelelő p, ha az utolsó kifejezés nem nagyobb, mint $1/n$, azaz

$$n(n-1) \leqq \frac{2^k}{k-1}\,.$$

A jobb oldali kifejezés k növekedtével minden határon túl nő, tehát minden n-hez választható alkalmas k és p érték.

$$n = 100 \quad \text{esetén} \quad 2^{18}/17 = 262\,144/17 > 15\,420 > 9900,$$

tehát választható p úgy, hogy 18 dobásból álló sorozattal igazságosan ki lehessen sorsolni az ajándékot.

Megjegyzés. Csak véletlen egyezés, hogy az I. megoldás szerint is 18 feldobással történhet a sorsolás. A II. megoldásnál a c_j együtthatók kiszámításával belátható, hogy már 16 dobásból álló sorozathoz is van alkalmas p érték.