

1990. áprilisában izraeli meghívásra négy magyar diák kétnapos matematikaversenyen vett részt Izraelben. A magyar küldöttség a februárban rendezett kétnapos olimpiai válogatóverseny első négy helyezettjeként az alábbi diákokból állt:

Balogh József, a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója;

Matolcsi Máté, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója;

Kondacs Attila, a budapesti Árpád Gimnázium IV. osztályos tanulója;

Czirók András, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója.

Vendéglátónk a világhírű tudományos kutatóintézet, a *Weizmann Institute of Science* volt. A két versenynap közül az első napon négy feladatot tűztek ki, a második napon pedig csapatverseny volt; a négyfős csapatok együtt dolgozhattak az egymásra épülő problémák megoldásán. A két versenynap feladatai a következők voltak.

Az egyéni verseny feladatai:

1. Bizonyítsuk be, hogy nincsenek olyan pozitív egész x, y számok, amelyekre

$$x^2 + y + 2 \text{ és } y^2 + 4z$$

egy-egy egész szám négyzete.

(6 pont)

2. A derékszögű ABC háromszög BC befogójának felezőpontja D , AC befogójának harmadolópontjai E és F , melyekre $AE = EF = FC$. A C -ből induló magasság talppontja G , az A , E , G pontokon átmenő kör középpontja H . Bizonyítsuk be, hogy az ABC és HDF háromszögek hasonlóak.

(6 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1989}{2} - \frac{1988}{3} + \frac{1987}{4} - \dots - \frac{2}{1989} + \frac{1}{1990} = \frac{1}{996} + \frac{3}{997} + \frac{5}{998} + \dots + \frac{1989}{1990}.$$

(7pont)

4. Egy téglalap alakú kockás papír minden rácspontjában egy-egy nyilat rajzolunk, párhuzamosan a papír valamelyik oldalával. (A papír szélén levő rácspontokból nem mutathat nyíl a papíron kívülre.)

Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos pont – vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan –, amelyekből ellenkező irányú nyilak indulnak el.

(8 pont)

Az egyéni verseny legnehezebb, negyedik feladatának a megoldása:

Az állítást teljes indukcióval fogjuk belátni. Az a meglepő a dologban, hogy ezt a konkrét feladatot képtelenség így kezelni, azonban egy nehezebbnek tűnő általánosabb probléma már megoldható a teljes indukció módszerével.

A feladat nehezítése mindössze annyi, hogy nem téglalapokra látjuk be az állítást, hanem rácsegyenesek mentén kivágott tömör síkidomokra (amelyekben így nincsen „lyuk”, és rácsegyenesek határolta egységnyezetekből állnak). A teljes indukciót n -re, az egységnyezetek számára végezzük.

Ha $n = 1$, akkor vagy van két olyan nyíl, amelyek egy oldalon elhelyezkedő csúcsokból indulnak, és ellentétes irányúak, vagy nincs, de ekkor a nyilak szerint haladva körbe tudjuk járni a négyzetet, s ez csak úgy lehetséges, ha az egy átlón elhelyezkedő nyilak ellentétes irányba mutatnak.

Tegyük fel, hogy minden, k egységnyezetet tartalmazó síkidomra igaz a feladat állítása, ahol $k \in 1, 2, \dots, n$. Ebből a feltevésből kellene belátnunk azt, hogy minden $n + 1$ egységnyezetet tartalmazó síkidomra is igaz az állítás.

Válasszunk ki egy ilyen, $n + 1$ egységnyezetet tartalmazó síkidomban egy tetszőleges rácspontot, s menjünk ebből a pontból abba a rácspontba, amely szomszédos ezzel, s amerre az eredeti rácspontból a nyíl mutat. Így lépegetve a nyilak mutatta irányba sose akadhatunk el, mert minden rácspontból egy másik, a síkidomon belüli rácspontba mutat egy nyíl. Ha ehhez még hozzávesszük, hogy a síkidom véges sok rácspontot tartalmaz, akkor nyilvánvaló, hogy egy idő után olyan rácsponthoz érkezünk, amelynél már voltunk, tehát az utunk bezárul – létrejön egy kör.

Egy ilyen kör határolta S' síkidomból nem mutat kifelé nyíl, tehát ha elhagyjuk az eredeti síkidom körön kívüli részét, akkor a maradék S minden tekintetben eleget tesz a feladat feltételeinek.

Ha S kevesebb mint $n + 1$ egységnyezetet tartalmaz, akkor indukciós feltevésünk szerint készen vagyunk. Még itt kitérnek arra az esetre (amivel az indukciós feltevés nem foglalkozik), amikor a kör egy egységnyezetet sem fog körül, azaz területe 0. Ekkor nyilván a kör két nyílból áll, amelyek egy egységnyezet egy oldalán helyezkednek el, és egymás felé, azaz ellentétes irányba mutatnak.

Már csak az az eset van hátra, amikor S mind az $n + 1$ egységnyezetet tartalmazza, tehát a kör egybeesik az eredeti síkidom határgörbéjével. Válasszunk ki egy, a határon lévő nyilat, és forgassuk el 90° -kal úgy, hogy az elforgatott nyíl a síkidom belseje felé mutasson. Ezután forgassuk el az összes nyilat 90° -kal ugyanilyen irányba (minden nyilon ugyanazt az α forgatást hajtsuk végre)! A határon lévő nyilak, amelyek eredetileg egy kört alkottak, most mind a síkidom határára merőlegesek és a síkidom belseje felé mutatnak, tehát nem alkothatnak egy kört (ez alól kivételek az $n = 1$ -nél tárgyalt $\uparrow \rightleftharpoons \downarrow$ típusú körök, de itt szemmel látható, hogy az átlós nyilak ellentétes irányúak).

Azonban most, az elforgatott nyilak szerint haladva is eljutunk egy körhöz, s mivel semelyik ilyen kör sem eshet egybe a határral, a kör kevesebb mint $n + 1$ egységnyezetet tartalmaz. Az indukciós feltevésünk szerint létezik

a kör által körülfogott síkidomban két olyan szomszédos nyíl, amelyek ellentétes irányúak. Most forgassuk vissza eredeti helyzetükbe a nyilakat. Könnyen ellenőrizhető, hogy azok a nyilak, amelyek az elforgatás előtt szomszédosak és ellentétes irányúak voltak, az elforgatás után is ilyen tulajdonságúak maradnak, tehát eredetileg is létezett két szomszédos, ellentétes irányba mutató nyíl.

Kondacs Attila

A csapatverseny feladatai:

1. Legyen α pozitív racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan, az α -t tartalmazó nyílt I intervallum, hogy minden olyan β racionális számra, melyre $\beta \in I$ és $\beta \neq \alpha$, a β nevezője nagyobb, mint az α nevezője. (A törtet egyszerűsített alakban tekintjük.)

2. Adott racionális α -hoz jelölje I_α a maximális fenti tulajdonságú intervallumot. Határozzuk meg I_α -t, ha $\alpha = \frac{19}{90}$.

3. Legyenek a és b olyan valós számok, melyekre

$$0 < a < b < 1 + a.$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan racionális α , melyre $a < \alpha < b$ és $(a; b) \subset I_\alpha$, azaz minden olyan racionális β -ra, melyre $a < \beta < b$ és $\beta \neq \alpha$, a β nevezője nagyobb, mint az α nevezője.

4. Adott pozitív valós $(a; b)$ párra jelölje a fenti α -t $\alpha(a; b)$. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} i) & \alpha\left(\frac{70}{177}, \frac{27}{68}\right) \\ ii) & \alpha\left(\sqrt{1990}, \sqrt{1991}\right) \end{aligned}$$

értékeket.

Tervezzünk minél gyorsabb algoritmust $\alpha(a; b)$ kiszámítására.

A verseny egyéni részét az izraeli *Erez Lapid* nyerte 22 ponttal, második helyen *Balogh József* végzett 21 ponttal. Az első nap feladataiból álló csapatverseny magyar győzelmet hozott; a magyar csapat összpontszáma 60, az izraelié pedig 50 pont volt. A zsüri a második nap feladataira beadott megoldások közül szintén a magyar csapat dolgozatait tartotta jobbnak, úgyhogy a verseny szép magyar sikert hozott.

Vendéglátóink gazdag programot biztosítottak számunkra. Az intézet maga is nagy élmény volt, jártunk Tel Aviv-ban, Jeruzsálemben, kétnapos buszkirándulást tettünk Izrael bibliai tájain, egy éjszakát egy kibucban töltöttünk a libanoni határ mentén, ahol az alapítók mesélték el nekünk a kibuc történetét és mai életét.

Jövőre Magyarország a meghívó fél, nálunk lesz a verseny, és remélhetőleg a jövőben évről-évre egyszer Izraelben, egyszer pedig Magyarországon sor kerül a két ország diákjainak találkozására.