

1. Legyen a hatszög középpontja O , ekkor $ODEF$ rombusz, H az OE sugarat is felezi, $OH = BG$, másrészt $\angle AOH = 120^\circ = \angle ABG$. Az A körüli 60° -os elfordítás az ABG töröttvonaladarabot AOH -ba viszi át. Így $\angle GAH = 60^\circ$, tehát $GH = AG = AH$.

A koszinusztétellel $AG^2 = AB^2 \left(1 + \frac{1}{4} - \cos 120^\circ\right) = \frac{7 \cdot AB^2}{4}$. A két terület mértékszámának $\frac{4}{\sqrt{3}}$ szorosai AG^2 és $6 \cdot AB^2$, arányuk $7 : 24$.

2. A föltevés: $27(10b + a - 10a - b) + 47 = 1001a + 110b$. Innen

$$a = \frac{47 + 133b}{1244} = 1 - \frac{1197 - 133b}{1244} \geq 1,$$

mert a kezdő számjegy. A számláló csak 0 lehet, a keresett szám 1991.

3. A zárójelbeli kifejezés pozitív, mert (valós) logaritmus csak pozitív számnak van. Sőt legalább 1 az értéke, különben a gyökjel alatt negatív szám állna. A tízes alapú logaritmus monoton növekvő függvény. Mármost $x^2 + 2x - 15 \geq 1$ akkor teljesül, ha vagy

$$x \leq -1 - \sqrt{17} (\approx -5, 123 \dots) \quad \text{vagy pedig} \quad x \geq -1 + \sqrt{17} (\approx +3, 123 \dots).$$

4. A definíció szerint az OA_{n+4} szakasz az OA_4 -nek 4-szeres nagyítása az O centrumból, az $A_5A_6A_7A_8A_9$ vonalelem 4-szerese az $A_1A_2A_3A_4A_5$ -nek s í. t. A kívánt vonal 25 ilyen elemből áll össze. Az első elem hossza $a_1 = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 3(2 + \sqrt{2})$, a mértani sorozat összege $a_1(4^{25} - 1) : (4 - 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot (2^{50} - 1)$.

(Az eredményben a tizedes vessző előtt 16 számjegy áll.)

5. Az $a^2b = 2a^2 + 4ab$ föltevésből $ab = 2a + 4b$, hiszen a pozitív. Továbbá

$$a = \frac{4b}{b-2} = 4 + \frac{8}{b-2},$$

vagyis $(b-2)$ pozitív osztója a 8-nak, értéke 1, 2, 4, és 8 lehet. Az oszlop magassága $b = 3, 4, 6$ és 10 lehet, alapéle pedig rendre $a = 12, 8, 6$ és 5. A harmadik megoldás különleges négyzetes oszlop: kocka.

6. Legyen a szögek jele ϵ, ζ, η és θ (tetszőleges sorrendben). Az $\epsilon + \zeta$ és $\eta + \theta$ pozitív számokra a számtani és a mértani közepek nagyságviszonya alapján, majd mivel a négyzetek szögeinek összege 2π , azért

$$(\epsilon + \zeta) \cdot (\eta + \theta) \leq \left(\frac{(\epsilon + \zeta) + (\eta + \theta)}{2} \right)^2 = \pi^2.$$

7. A következő jelölésekkel: $TA = c_1, TB = c_2$ és $TC = m$, a CP^2 és CQ^2 kifejezések közös értéke $c_1^2 + c_2^2 + m^2$.

8. Az egyenlet valós megoldásaiban

$$p = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}.$$

A kivonandó 0 és $\frac{1}{2}$ közé esik, tehát $1 \geq p \geq \frac{1}{2}$. Ennélfogva a feladat követelményének a $p < \frac{1}{2}$ és $p > 1$ paraméter-értékek tesznek eleget.