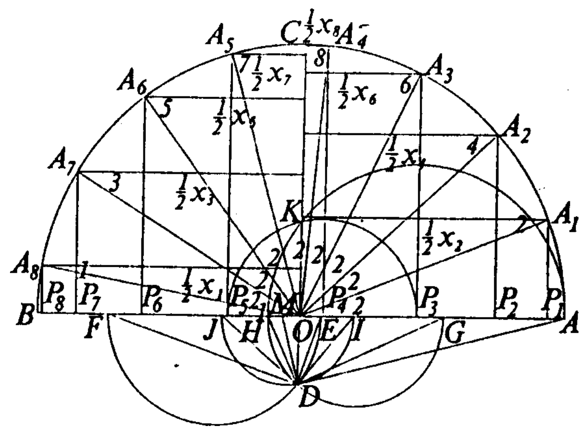
1. – *Gauss*[1] fellépéséig a páratlan oldalszámú szabályos sokszögek közül csak a 3, 5 és 15 oldalú sokszöget tudták körzővel és vonalzóval megszerkeszteni.[2] *Gauss* 1796-ban, 18 éves korában felfedezte, hogy a szabályos 17-szög is megszerkeszthető körzővel és vonalzóval. Ez a felfedezés, melyre egész életében büszke volt,[3] indította arra, hogy életét a matematika tanulmányozásának szentelje.

Gauss tulajdonképpen csak azt mutatta meg, hogy a szabályos 17-szög szerkesztése négy másodfokú egyenlet gyökeinek a megszerkesztésére vezethető vissza, anélkül, hogy a szerkesztés keresztülvitelére eljárást adott volna. Az azóta eltelt időben a szabályos 17-szög számos különböző szerkesztését közölték. Ezek mind az említett négy egyenlet geometriai megoldásán alapulnak. Nem ismeretes olyan szerkesztés, mely a feladat *tiszta geometriai* elemzésén alapulna. A következőkben a szabályos 17-szög szerkesztésének egy ilyen tárgyalását adjuk.

2. – Jelentsék A, A_1, A_2, …, A_{16} az O középpontú és $OA = 1$ sugarú körbe beírt szabályos 17-szög egymásután következő csúcspontjait. Az A_1, A_2, …, A_8 pontokból az AB átmérőre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre P_1, P_2, …, P_8 *(1. ábra).*

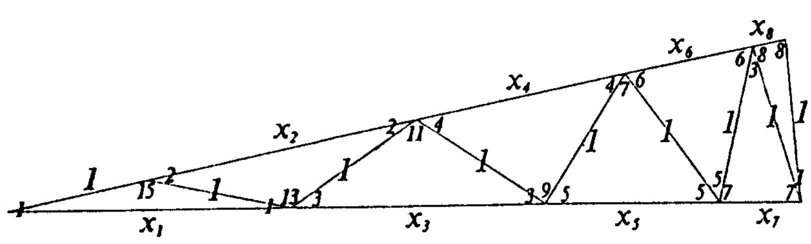


1. ábra

Ugyane pontokból a kör AB-re merőleges OC sugarára bocsátott merőlegesek a körbe beírt szabályos 34-szög egy-egy átlójának felével egyenlők. Legyen ezen átlók hossza nagyságuk csökkenő sorrendjében x_1, x_2, x_3, …, x_8. Ekkor:

$$\begin{aligned} 2\cdot OP_1 &= x_2, & 2\cdot OP_5 &= x_7,\\ 2\cdot OP_2 &= x_4, & 2\cdot OP_6 &= x_5,\\ 2\cdot OP_3 &= x_6, & 2\cdot OP_7 &= x_3,\\ 2\cdot OP_4 &= x_8, & 2\cdot OP_8 &= x_1. \end{aligned}$$

Ábránkon feltüntettük az egyes szögeknek a körbe beírt szabályos 34-szög egy oldalához tartozó középponti szögre, mint szögegységre vonatkozó mérőszámát. Ama egyenlő szárú háromszögekből, melyeknek alapja x_1, x_2, …, x_8 és száraik a kör sugarával egyenlők, összeállítható a *2. ábrán* látható háromszög, mely egyenlő szárú.[4]



2. ábra

[1] *Carl Friedrich Gauss* német matematikus, fizikus és csillagász, szül. 1777. ápr. 30-án Braunschweigben, megh. 1855. febr. 23-án Göttingában, ahol 1807 óta egyetemi tanár és csillagvizsgáló igazgatója volt.

[2] Az utóbbit a $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$ egyenlőség alapján a kör kerületének 3 és 5 egyenlö részre való osztásával.

[3] Erre utal az a kívánsága is, hogy sírkövére szabályos 17-szöget véssenek. Ez a kívásága ugyan nem teljesült, de szülővárosában emelt szobra szabályos 17-szögű alapon áll.

[4] Könnyü belátni, hogy ha $n = 2k+1$, ahol k 1-nél nagyobb egész szám, és φ az egységsugaru körbe beírt $2n$ oldalu szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög, akkor ama egyenlő szárú háromszögekből, melyekben az alapon nyugvó szög φ, 2φ, …, $k\varphi$ és száraik egységnyi hosszúságúak, egyenlő szárú háromszög állítható össze. Annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelyben az alapon nyugvó szög $k\varphi$, nyilván az egységsugarú körbe beírt szabályos $2n$-szög oldalaival egyenlő. Ezt használja fel egy kb. ezer évvel ezelőtt élt névtelen arab szerző és később *Vieta* francia matematikus is (élt 1540 – 1603) ama algebrai egyenlet levezetésére, amelynek megoldására a körbe beírt szabályos hétszög szerkesztése visszavezethető. (Minthogy ez az egyenlet harmadfokú, a kör sugarából nem állítható elő *elemi geometriai szerkesztéssel* – azaz pusztán vonalzó és körző használatával – a körbe beírt szabályos hétszög oldalával egyenlő egyenesdarab.)

Ebből következik

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 = 1$$

alapegyenletünk.

Ábránk alapján továbbá

$$1 : \frac{1}{2}x_1 = x_1 : \left(1 + \frac{1}{2}x_2\right),$$

amiből

$$x_1^2 = 2 + x_2;$$

hasonlóképpen

$$1 : \frac{1}{2}x_1 = x_2 : \frac{1}{2}\left(x_1 + x_3\right),$$

amiből

$$x_1 x_2 = x_1 + x_3;$$

és így tovább. Ily módon a következő szorzótáblát kapjuk:[5]

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	$2+x_2$	x_1+x_3	x_2+x_4	x_3+x_5	x_4+x_6	x_5+x_7	x_6+x_8	x_7-x_8
x_2	x_1+x_3	$2+x_4$	x_1+x_5	x_2+x_6	x_3+x_7	x_4+x_8	x_5-x_8	x_6-x_7
x_3	x_2+x_4	x_1+x_5	$2+x_6$	x_1+x_7	x_2+x_8	x_3-x_8	x_4-x_7	x_5-x_6
x_4	x_3+x_5	x_2+x_6	x_1+x_7	$2+x_8$	x_1-x_8	x_2-x_7	x_3-x_6	x_4-x_5
x_5	x_4+x_6	x_3+x_7	x_2+x_8	x_1-x_8	$2-x_7$	x_1-x_6	x_2-x_5	x_3-x_4
x_6	x_5+x_7	x_4+x_8	x_3-x_8	x_2-x_7	x_1-x_6	$2-x_5$	x_1-x_4	x_2-x_3
x_7	x_6+x_8	x_5-x_8	x_4-x_7	x_3-x_6	x_2-x_5	x_1-x_4	$2-x_3$	x_1-x_2
x_8	x_7-x_8	x_6-x_7	x_5-x_6	x_4-x_5	x_3-x_4	x_2-x_3	x_1-x_2	$2-x_1$

Mármost az x-ekből a következő, különböző tényezőkből álló kéttényezős szorzatok képezhetők:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1x_2, & x_1x_3, & x_1x_4, & x_1x_5, & x_1x_6, & x_1x_7, & x_1x_8; \\
 & x_2x_3, & x_2x_4, & x_2x_5, & x_2x_6, & x_2x_7, & x_2x_8; \\
 & & x_3x_4, & x_3x_5, & x_3x_6, & x_3x_7, & x_3x_8; \\
 & & & x_4x_5, & x_4x_6, & x_4x_7, & x_4x_8; \\
 & & & & x_5x_6, & x_5x_7, & x_5x_8; \\
 & & & & & x_6x_7, & x_6x_8; \\
 & & & & & & x_7x_8.
\end{array}$$

Ha kiindulunk az x_1x_2 szorzatból és a szorzótábla segítségével megkeressük azt a két x-et, melyeknek összege, illetve különbsége e szorzattal egyenlő, azután megkeressük azt a két x-et, melynek összege illetve különbsége az előbb talált két x szorzatával egyenlő, és így tovább, akkor nyolc lépés után az alábbi I. oszlopban felírt egyenlőségeket kapjuk:

[5]A táblázatba foglalt egyenlőségek a $\frac{\pi}{17}$ szög és többszöröseinek szögfügvényei közötti kapcsolatot fejeznek ki. Pl. Az

$$x_1x_2 = x_1 + x_3$$

egyenlőség a

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

ismert képletből adódó

$$2\cos\frac{\pi}{17} \cdot \cos 2\frac{\pi}{17} = \cos\frac{\pi}{17} + \cos 3\frac{\pi}{17}$$

összefüggést. Ez teszi lehetővé, hogy további meggondolásainkban a trigonometriát is nélkülözzük.

I.	II.	III.	IV.
$x_1x_2 = x_1 + x_3,$	$x_1x_4 = x_3 + x_5,$	$x_1x_5 = x_4 + x_6,$	$x_1x_6 = x_5 + x_7,$
$x_1x_3 = x_2 + x_4,$	$x_3x_5 = x_2 + x_8,$	$x_4x_6 = x_2 - x_7,$	$x_5x_7 = x_2 - x_5,$
$x_2x_4 = x_2 + x_6,$	$x_2x_8 = x_6 - x_7,$	$x_2x_7 = x_5 - x_8,$	$x_2x_5 = x_3 + x_7,$
$x_2x_6 = x_4 + x_8,$	$x_6x_7 = x_1 - x_4,$	$x_5x_8 = x_3 - x_4,$	$x_3x_7 = x_4 - x_7,$
$x_4x_8 = x_4 - x_5,$		$x_3x_4 = x_1 + x_7,$	$x_4x_7 = x_3 - x_6,$
$x_4x_5 = x_1 - x_8,$		$x_1x_7 = x_6 + x_8,$	$x_3x_6 = x_3 - x_8,$
$x_1x_8 = x_7 - x_8,$		$x_6x_8 = x_2 - x_3,$	$x_3x_8 = x_5 - x_6,$
$x_7x_8 = x_1 - x_2,$		$x_2x_3 = x_1 + x_5,$	$x_5x_6 = x_1 - x_6.$

Ha az x_1x_3, x_1x_8, x_2x_4, x_2x_6, x_4x_5, x_4x_8, vagy x_7x_8 szorzatból indulunk ki, akkor ugyanezeket az egyenlőségeket kapjuk, csak más sorrendben. Ha az I. oszlopban nem szereplő kéttényezős szorzatok közül a szorzatok fent felírt sorában az elsőből, x_1x_4-ből indulunk ki, akkor a II. oszlopban álló egyenlőségek adódnak. Hasonló módon az eddig nem szerepelt szorzatok közül az elsőből, x_1x_5-ből kiindulva a III. oszlopban álló egyenlőségeket és az azokban sem szereplő szorzatok közül az elsőből, x_1x_6-ból kiindulva a IV. oszlopban álló egyenlőségeket kapjuk.

Az egy oszlopban álló egyenlőségek a P pontok által határolt egyenesdarabok fölé, mint átmérő fölé rajzolható nyolc-nyolc, illetőleg négy, egymást meghatározott ciklusos sorrendben követő kör közötti kapcsolatot fejeznek ki, mely szerint az O pontnak bármelyik körre vonatkozó hatványa a rákövetkező kör középpontjának O-tól való távolságával egyenlő. Pl. az $x_2x_6 = x_4 + x_8$ egyenlőség így is írható:

$$4 \cdot OP_1 \cdot OP_3 = 2\left(OP_2 + OP_4\right),$$

vagy még így is:

$$OP_1 \cdot OP_3 = \frac{1}{2}\left(OP_2 + OP_4\right);$$

itt a bal oldalon álló szorzat az O pontnak a P_1P_3 átmérő fölé írt körre vonatkozó hatványa, a jobb oldalon álló kifejezés pedig a P_2P_4 átmérő fölé írható kör középpontjának O-tól való távolsága.

Minthogy a II. oszlopban álló egyenlőségekben az O pontnak csak négy körre, a P_3P_5, P_6P_7, P_1P_4, P_2P_8 fölé, mint átmérő fölé írt körökre vonatkozó hatványa és e körök E, F, G, H középpontjainak O-tól való

$$OE = \frac{1}{2}\left(OP_3 - OP_5\right) = x_6 - x_7,$$

$$OF = \frac{1}{2}(OP_6 + OP_7) = x_3 + x_5,$$

$$OG = \frac{1}{2}(OP_1 + OP_4) = x_2 + x_8,$$

$$OH = \frac{1}{2}(OP_8 - OP_2) = x_1 - x_4$$

távolsága közötti kapcsolatot fejeznek ki, mely távolságokra nézve alapegyenletünk is feltételt jelent, törekvésünk arra irányul, hogy e négy kör középpontjai között további olyan kapcsolatot keressünk, amelyek alapján e pontok megszerkeszthetők.

Ha ugyanis e pontokat ismerjük, akkor többféleképpen is meg tudjuk szerkeszteni a keresett sokszöget. Így pl. az

$$x_6x_7 = x_1 - x_4$$

egyenletből

$$OP_3 \cdot OP_5 = OH = 1 \cdot OH = OA \cdot OH,$$

és így az AH és P_3P_5 átmérő fölé rajzolt körök az OC sugár egy K pontjában metszik egymást (l. az *1. ábrát*). Ha tehát ismerjük az E és H pontokat, akkor meg tudjuk szerkeszteni a P_3 és P_5 pontokat, és ezek segítségével a keresett sokszöget.

Az E, F, G, H pontok között kapcsolatot keresve mindenek előtt észrevesszük, hogy az EF és GH átmérő fölé írt körök az OC sugár meghosszabbítását ugyanabban a D pontban metszik. Ugyanis:

$$OE \cdot OF = \frac{1}{16}(x_6 - x_7)(x_3 + x_5) = \frac{1}{16}(x_3x_6 - x_3x_7 + x_5x_6 - x_5x_7) =$$

$$= \frac{1}{16}(x_3 - x_8 - x_4 + x_7 + x_1 - x_6 - x_2 + x_5),$$

és így alapegyenletünk szerint

$$OE \cdot OF = \frac{1}{16}.$$

Hasonló módon

$$OG \cdot OH = \frac{1}{16}(x_2 + x_8)(x_1 - x_4) = \frac{1}{16}.$$

Tehát

$$OE \cdot OF = OG \cdot OH.$$

Látni való egyszersmind, hogy

$$OD = \frac{1}{4}.$$

Észrevesszük továbbá, hogy G ugyanolyan arányban osztja az EF távolságot kivülről, mint H belülről. Ugyanis

$$EG \cdot FH = (OG - OE)(OF - OH) =$$

$$= \frac{1}{16}(x_2 + x_8 - x_6 + x_7)(x_3 + x_5 - x_1 + x_4) =$$

$$= \frac{1}{16}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8),$$

és

$$FG \cdot EH = (OF + OG)(OE + OH) =$$

$$= \frac{1}{16}(x_3 + x_5 + x_2 + x_8)(x_6 - x_7 + x_1 - x_4) =$$

$$= \frac{1}{16}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8),$$

vagyis

$$EG \cdot FH = FG \cdot EH,$$

amiből

$$EG : FG = EH : FH.$$

Minthogy pedig

$$EDF\sphericalangle = GDH\sphericalangle = 90^\circ,$$

azért

$$GDE\sphericalangle = EDH\sphericalangle = HDF\sphericalangle = 45^\circ.$$

Legyen I az AB egyenes ama pontja, mely ugyanolyan arányban osztja az EF távolságot kívülről, mint O belülről. Akkor

$$OE : OF = EI : FI,$$

ahonnan

$$OE \cdot FI = OF \cdot EI,$$

vagyis

$$OE(OF + OI) = OF(OI - OE),$$

s így

$$OI = \frac{2 \cdot OF \cdot OE}{OF - OE} = \frac{(x_6 - x_7)(x_3 + x_5)}{2(x_3 + x_5 - x_6 + x_7)},$$

vagy, mivel

$$(x_6 - x_7)(x_3 + x_5) = 1,$$

azért

$$OI = \frac{1}{2(x_3 + x_5 - x_6 + x_7)}.$$

Minthogy pedig $EDF\sphericalangle = 90^\circ$, azért $EDI\sphericalangle = ODE\sphericalangle$.

Legyen J az AB egyenes ama pontja, mely ugyanolyan arányban osztja a GH távolságot kívülről, mint az O pont belülről. Akkor

$$OG : OH = GJ : HJ,$$

ahonnan

$$OG \cdot HJ = OH \cdot GJ,$$

vagyis

$$OG(OJ - OH) = OH(OG + OJ),$$

s így

$$OJ = \frac{2 \cdot OG \cdot OH}{OG - OH} = \frac{(x_2 + x_8)(x_1 - x_4)}{2(x_2 + x_8 - x_1 + x_4)},$$

vagy, mivel

$$(x_2 + x_8)(x_1 - x_4) = 1,$$

azért

$$OJ = \frac{1}{2(x_2 + x_8 - x_1 + x_4)}.$$

A fentiek szerint

$$OI \cdot OJ = \frac{1}{4(x_3 + x_5 - x_6 + x_7)(x_2 + x_8 - x_1 + x_4)},$$

vagy, mivel

$$(x_3 + x_5 - x_6 + x_7)(x_2 + x_8 - x_1 + x_4) = 4,$$

azért

$$OI \cdot OJ = \frac{1}{16} = \overline{OD}^2.$$

De akkor

$$OI = \frac{1}{16 \cdot OJ} = \frac{1}{8}(x_2 + x_8 - x_1 + x_4)$$

és

$$OJ = \frac{1}{16 \cdot OI} = \frac{1}{8}(x_3 + x_5 - x_6 + x_7),$$

s így I a GH és J az EF távolság felezőpontja.

Legyen IJ felezőpontja M. Akkor

$$OM = \frac{1}{16}(x_3 + x_5 - x_6 + x_7 - x_2 - x_8 + x_1 - x_4) = \frac{1}{16},$$

és így $ADM\sphericalangle = 90°$, mert

$$OA \cdot OM = 1 \cdot OM = \frac{1}{16} = \overline{OD}^2.$$

Még megjegyezzük, hogy az A pont ugyanolyan arányban osztja az IJ távolságot kívülről, mint az O pont belülről és így $ODI\sphericalangle = IDA\sphericalangle$, tehát

$$4 \cdot ODE\sphericalangle = ODA\sphericalangle.$$

Valóban

$$OJ - OI = \frac{1}{8} = 2 \cdot OI \cdot OJ,$$

ahonnan

$$OJ(1 - OI) = OI(1 + OJ),$$

vagy

$$OJ(OA - OI) = OI(OA + OJ),$$

és így

$$OJ \cdot AI = OI \cdot AJ,$$

azaz

$$AI : AJ = OI : OJ.$$

3. – Eredményeink alapján az O középpontú és OA sugarú körbe beírt szabályos 17-szög következő szerkesztése adódik (*1. ábra*):

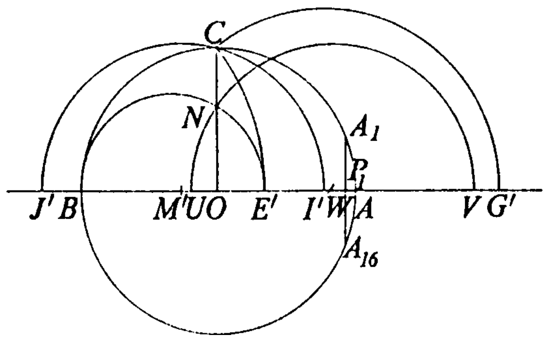
A körben megrajzoljuk az AB átmérőre merőleges OC sugarat és a meghosszabbítására rámérjük az $OD = \frac{1}{4}OA$ távolságot. A D pontban AD-re merőlegest állítunk, mely AB-t M-ben metszi. M-ből, mint középpontból MD sugárral kört rajzolunk, mely OA-t I-ben, OB-t pedig J-ben metszi. BJ meghosszabbítására rámérjük a $JE = JD$ távolságot, AI meghosszabbítására pedig az $IH = ID$-t. AH fölé, mint átmérő fölé kört rajzolunk, mely OC-t K-ban metszi. Ezután E-ből, mint középpontból a K ponton át kört rajzolunk, mely AB-t P_3-ban és P_5-ben metszi. E pontokban az AB-re emelt merőlegesek az adott kört a keresett 17-szög A_3, A_{14}, és A_5, A_{12} csúcspontjaiban metszik.

Ez a szerkesztés, amint látszik, *Lebesque*-től[6] való, aki a körosztás algebrai elméletéből indul ki.

Meggondolásaink alapján a szabályos 17-szög szerkesztésének egy más módja – mely *Richmond*-tól[8] való – a következő (1. *ábra*):

Az OC sugár meghosszabbítására – úgy mint előbb – rámérjük az $OD = \frac{1}{4}OA$ távolságot. Ezután az OA és OB sugáron meghatározzuk az E és H pontot úgy, hogy $EDO\sphericalangle = \frac{1}{4}ADO\sphericalangle$ és $EDH\sphericalangle = 45^\circ$ legyen. Az E és H pont ismeretében P_3 és P_5 úgy szerkeszthető meg, mint előbb.

Fenti meggondolásaink alapján a szabályos 17-szög más szerkesztése is könnyen igazolható. Így pl. a következő, talán legismertebb, *Serret–Bachmann*-féle[11] szerkesztés is (3. *ábra*):



3. ábra

[6] *Henri Lebesque* (1875–1941) a *Collège de France* [7] tanára és a párizsi tudományos akadémia tagja volt. A fenti szerkesztést *Lecons sur les constructions géometriqués* című művében találjuk, mely csak halála után, 1950-ben jelent meg Párizsba.

[7] A Collège de France 1530-ban – a hajdani híres, de akkor már hanyatló félben levő párizsi egyetem versenytársaként – a tudományok művelésére és terjesztésére alapított állami intézet, amelyhez mindenkor a legnevesebb tudósokat sikerült megnyerni tanárnak.

[8] *Herbert William Richmond* (1863–1948) a cambridgei *Kings College*-ben[9] matematikát tanított. A fenti szerkesztést 1893-ban a *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics* 26. kötetében közölte.
Richmond-nál a szerkesztés igazolása azon alapul, hogy a másodfokú egynlet geometriai megoldása – bizonyos feltételek mellett – szögfelezésre vezethető vissza. Például az egységsugarú körbe beírt kétféle szabályos tízszög[10] oldalhossza kielégíti az

$$x^2 + x - 1 = 0$$

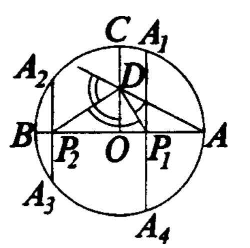
egyenletet, mely még így is írható:

$$\frac{2x}{1 - x^2} = 2.$$

Ebből a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$$

ismert képlet alapján – figyelembevéve, hogy fele akkora sugarú körbe beírt szabályos tízszög oldala is fele akkora – a szabályos ötszög következő szerkesztése adódik (*4. ábra*):



4. ábra

Az O középpontú és OA sugarú kör AB átmérőjére merőleges OC sugarának D középpontját összekötjük A-val; azután megrajzoljuk az ODA szögnek és mellékszögének a felezőjét, mely AB-t P_1 és P_2 pontban metszi. E pontokban az AB-re emelt merőlegesek a kört a keresett $AA_1A_2A_3A_4$ ötszög A_1 és A_4, illetőleg A_2 és A_3 csúcspontjaiban metszik.

[9] A *King's College* egyike a cambridge-i egyetemen fennálló 17 intézetnek, amelyekben az egyetem hallgatói a rájuk felügyelő és őket tanító tanárokkal együtt laknak, étkeznek és tanulnak, s amelyeket saját törvényeik szerint igazgatnak.

[10] Az egységsugarú körbe beírt különböző alakú szabályos n-szögeket úgy kapjuk meg, hogy a kör kerületének $\frac{k}{n}$-ed részéhez tartozó húrt a kerület egy pntjából kiindulva n-szer egymás után felrakjuk, ahol k helyébe azokat az $\frac{n}{2}$-nél kisebb pozitív egész számokat tesszük, melyek n-hez relatív prímek.Ha $k = 1$, akkor közönséges szabályos n-szöget kapunk; ha $k > 1$, akkor a sokszöget szabályos *csillag-n-szög*nek mondjuk.

[11] *Joseph Alfred Serret* (1819–1865) a *Collège de France* tanára és a párizsi tudományos akadémia tagja volt. A szabályos 17-szög általa feltalált szerkesztését *Cours d'algèbre supérieure* című művében írja le (1849), mely több kiadásban és fordításban jelent meg.

Paul Bachmann (1837–1920) előbb a boroszlói egyetem, azután a mainzi akadémia tanára volt. A fenti szerkesztés, mely *Serret* szerkesztésének módosított változata, *Die Lehre von der Kreisteilung* című művéből való (1872).

Legyen OC az O középpontú kör AB átmérőjére merőleges sugara. Rámérjük a kör OB sugarára az $OM' = \frac{1}{4}OA$ távolságot és M'-ből, mint középpontból $M'C$ sugárral kört rajzolunk, mely OA-t I'-ben, OB-t pedig J'-ben metszi. J'-ből $J'C$ sugárral körívet rajzolunk, mely AB-t E'-ben metszi; hasonlóképp I'-ből $I'C$ sugárral körívet rajzolunk, mely AB meghosszabbítását G'-ben metszi. BE' fölé félkört rajzolunk, mely OC-t N-ben metszi. E pontból $\frac{1}{2}OG'$ sugárral elmetsszük OA-t, miáltal a W pontot kapjuk. Ha a W-ből az N ponton át rajzolt kör AB-t, illetőleg a meghosszabbítását az U és V pontban metszi, akkor OU a körbe beírt szabályos 34-szög oldalhossza, és OV felezőpontja a körbe beírt szabályos 17-szög A-val szomszédos A_1 (és A_{16})csúcspontjából AB-re bocsátott merőleges P_1 talppontja.

Valóban,

$$UV = OG' = 4 \cdot OG = x_2 + x_8$$

és

$$OU \cdot OV = \overline{ON}^2 = OB \cdot OE' = 1 \cdot OE' = 4 \cdot OE = x_6 - x_7 = x_2 x_8,$$

s így

$$OU = x_8 \qquad \text{és} \qquad OV = x_2.$$