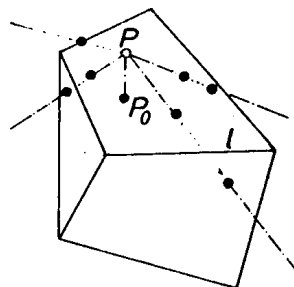


Ebben a részben elsősorban az n -dimenziós konvex poliéderekre vonatkozó Euler-típusú tétel bizonyítása lesz a fő cél. Részben ennek előkészítéseként, részben az eddigiekhez kapcsolódva először modellezzük a 4-, majd később az n -dimenziós konvex poliédereket a 3-, illetve általában az $(n - 1)$ -dimenziós térben, valamint megvizsgáljuk az n -dimenziós szabályos testeket.

Az előző részben tett erőfeszítéseink ellenére is úgy érzem, csak kissé homályosan tudjuk elképzelni a 4-dimenziós testeket. Természetesen felmerülő kérdés, hogy lehetséges-e valahogy 3 dimenzióban ábrázolni őket. Nos, abban az értelemben, ahogy a 3-dimenziós testeket le tudjuk rajzolni 2 dimenzióban, eggyel magasabb dimenzióban már gondjaink lesznek. Hiszen egy 2-dimenziós rajzot kívülről, a 3-dimenziós térből nézünk, hasonlóan egy 3-dimenziós rajzot a terünkön kívülről kellene nézni.

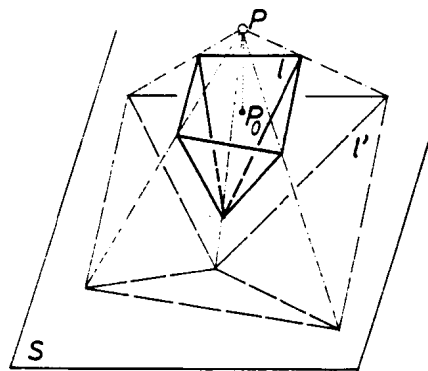
Viszont egy 4-dimenziós konvex testnek olyan 3-dimenziós modelljét már el tudjuk készíteni, amelynek a kombinatorikus szerkezete (csúcsok, élek, lapok, hiperlapok száma és kapcsolódása) megegyezik az eredeti testével. Az egyszerűbb érthetőség kedvéért először a 3-dimenziós konvex testeket modellezem a 2-dimenziós síkon.

Állítsuk a testet úgy, hogy valamelyik (mondjuk l) lapja fölül, vízszintesen legyen. Vegyünk fel egy S vízszintes síkot a test alatt. Legyen P_0 l -nek egy belső pontja. Mivel a test konvex, ezért a P_0 -on átmenő, nem vízszintes egyenesek P_0 -on kívül pontosan egy pontban metszik a test felszínét, és a felszín minden, nem l -hez tartozó pontjához pontosan egy ilyen egyenes van. Ha P elég kicsivel van P_0 felett, akkor P -re az lesz igaz, hogy minden, l belsején áthaladó, P -ből induló félegyenes még pontosan egy, l -en kívüli pontban metszi a test felszínét, és a felszín minden, l -en kívüli pontjához pontosan egy ilyen félegyenes van. Az l kerületén átmenő, P -ből induló félegyenesek pedig máshol nem metszik a felszínt (1. ábra).



1. ábra

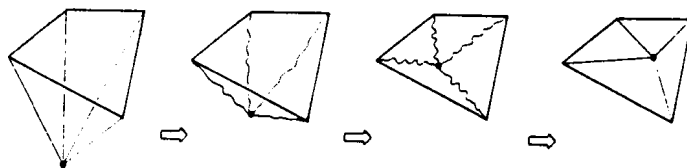
Vetítsük le a test felszínét P -ből a test alatti vízszintes S síkra. (Egy Q felszíni pont vetülete a PQ félegyenes és az S sík metszéspontja. Mivel P a test felett van, S pedig vízszintes, ezért mindig van metszéspont.) Mivel l vízszintes volt, ezért vetülete (l') egy l -hez hasonló, így konvex sokszög lesz. Az előző bekezdés szerint a felszín l -en kívüli részének vetülete egyrétűen lefedi l' -t. Másrészt a konvex lapok vetületei a lappal megegyező oldalszámú konvex sokszögek, tehát a felszín l -en kívüli lapjainak vetületei az l' konvex sokszöget konvex sokszögekre bontják fel, ezek a konvex sokszögek ugyanolyan típusúak, mint a test lapjai, és a szomszédos lapok vetületei szomszédos sokszögek (2. ábra).



2. ábra

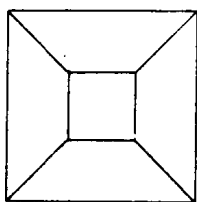
A kapott konvex tartományrendszernek tehát ugyanolyan a kombinatorikus szerkezete, mint az eredeti konvex poliédernek. A k lapú test minden lapjának a vetülete felel meg, így az l lapnak l' , a többi $(k - 1)$ -nek pedig a feldarabolt l' síkidom $(k - 1)$ darab konvex sokszögtartománya felel meg.

Az így kapott tartományrendszert a test „kifordításának” fogom hívni. Ezt az elnevezést az motiválja, hogy az előbb kapott tartományrendszert a következőképpen is elő lehet állítani. Képzeljük el, hogy a test felszíne gumihártyából van, az élek gumiszálakból. Tüntessük el az l lap hártáját. Az így kapott lyukat kezdjük kitágítani, és kezdjük el rajta keresztül a testet kifordítani, de ne fordítsuk ki teljesen, csak a lyuk síkjáig. Így egy ugyanolyan kombinatorikus szerkezetű síkbeli tartományrendszert kapunk, mint az előbb, alkalmas nyújtásokkal és összehúzásokkal megkaphatjuk az előző rendszert (3. ábra).

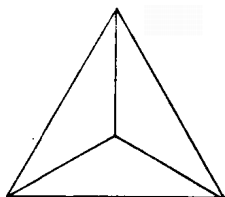


3. ábra

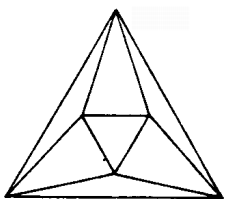
Illusztrációként nézzük meg, hogy mi lesz a 3-dimenziós szabályos testek „kifordítása”. (A „kifordítást” mindig az első, a vetítés módszerrel fogjuk elvégezni.) Állítsuk a kockát egy vízszintes S lapra (erre fogunk vetíteni), legyen P a felső lap középpontja fölött kicsivel egy pont. P -ből S -re vetítve a kockát, az alsó lap fixen marad, a felső lap ezzel párhuzamos élű, nagyobb, koncentrikus négyzetbe jut, a négy oldalsó lapból pedig egy-egy egyenlő szárú trapéz lesz (4. a ábra). A többi szabályos test esetén is úgy érdemes végezni a „kifordítást”, hogy P -t a felső l lap középpontja felett vesszük, így a 4. b, c, d, e ábrán látható szép szabályos tartományrendszereket kapjuk „kifordításként”.



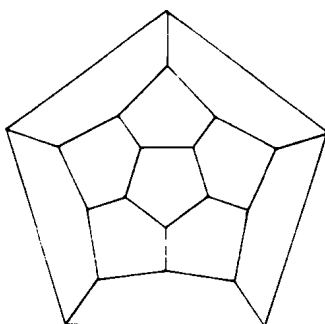
4. a ábra



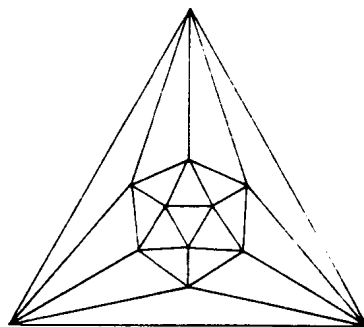
4. b ábra



4. c ábra



4. d ábra

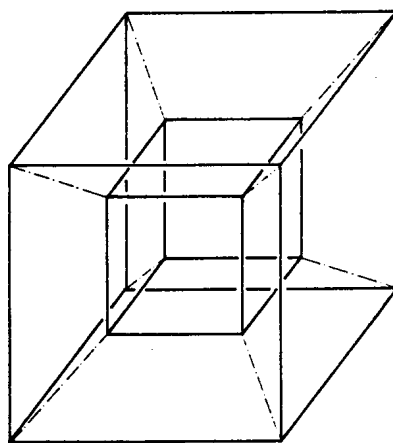


4. e ábra

Ez a „kifordítás” már 3 dimenzióban is néha igen hasznos, például sok (főként kombinatorikus) tulajdonság sokkal könnyebben vizsgálható a síkbeli modellen. Megfordítva, a 4. ábra rajzait felfoghatjuk gráfoknak is. Így nevezetes síkba rajzolható gráfokat kapunk, amelyeknek néhány tulajdonsága éppen az eredeti test tulajdonságaiból következik.

Minket persze elsősorban a „kifordítás” többdimenziós általánosítása érdekel. Nézzük először 4 dimenzióban! Legyen A egy (k) hiperlapú 4-dimenziós konvex poliéder. Ahogy az egyenes két félsíkra osztja a síkot, a sík két féltérre osztja a teret, a mi (T) 3-dimenziós terünk két 4-dimenziós féltérre osztja a 4-dimenziós teret. Helyezzük el A -t az egyik (mondjuk „felső”) féltérben úgy, hogy az egyik (mondjuk h) hiperlapja párhuzamos legyen a T terünkkel, A pedig h és T között legyen. (Azaz h a „felső” hiperlapja.) Legyen P nagyon kicsivel h egy belső pontja „fölött”. (A „fölött” precízen azt jelenti, hogy a h által meghatározott, A -t nem tartalmazó 4-dimenziós féltérben.) P -ből vetítsük az A testet a T terünkre. Ha P elég közel volt h -hoz, akkor hasonlóan, mint 1-gyel kevesebb dimenzióban, h egy hozzá hasonló h' poliéderbe megy át, a többi $k - 1$ hiperlap képe is az eredetivel megegyező kombinatorikus szerkezetű konvex poliéder lesz, ezek ugyanúgy kapcsolódnak, mint az eredetiek, és egy felosztását adják h' -nek. Vagyis a kapott A' 3-dimenziós konvex tartományrendszer ugyanolyan kombinatorikus szerkezetű, mint az eredeti A 4-dimenziós poliéder.

Készítsük el a I. részben megismert három 4-dimenziós szabályos test „kifordítását”! Ez hasznos lesz, mind a „kifordítás” megértése, mind a 4-dimenziós testek megismerése szempontjából. Most is kezdjük a legegyszerűbbel, a 4-dimenziós kockával, a tesszerakttal. Legyen az A tesszerakt egyik (h_1) hiperlapja a T terünkben, így a „szemközti” h hiperlap párhuzamos a terünkkel, és a tesszerakt a kettő között helyezkedik el. Legyen A mondjuk a „felső” féltérben. Legyen P a h kocka „fölött” nagyon kicsivel. Vetítsük a tesszeraktot P -ből a terünkre. Hasonlóan, mint 1-gyel kevesebb dimenzióban, h_1 önmagába, h pedig egy olyan h' kockába megy át, amely koncentrikus h_1 -gyel, tartalmazza h_1 -et, lapjai párhuzamosak h_1 megfelelő lapjaival. A többi 6 hiperlap képe 6 darab egybevágó, szabályos, négyzet alapú csongvá (5. a ábra).



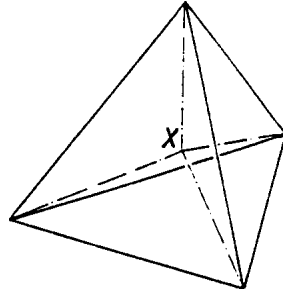
5. a ábra

Ez tehát a tesszerakt 3-dimenziós kombinatorikus modellje. 7 tartománya, 24 lapja, 32 éle és 16 csúcsa van. Ebből is következik, hogy a tesszeraktnak 8 hiperlapja, 24 lapja, 32 éle és 16 csúcsa van. (A hiperlapok száma mindig 1-gyel több, mint a „kifordítás” tartományainak száma, hiszen az egyik (a h) hiperlap képe nem tartomány, hanem a tartományok egyesítése (h').¹ Az is jól látszik például a modellből, hogy a csúcsonál 4 él, 6 lap és 4 hiperlap, az éleknél 3 lap és 3 hiperlap találkozik.

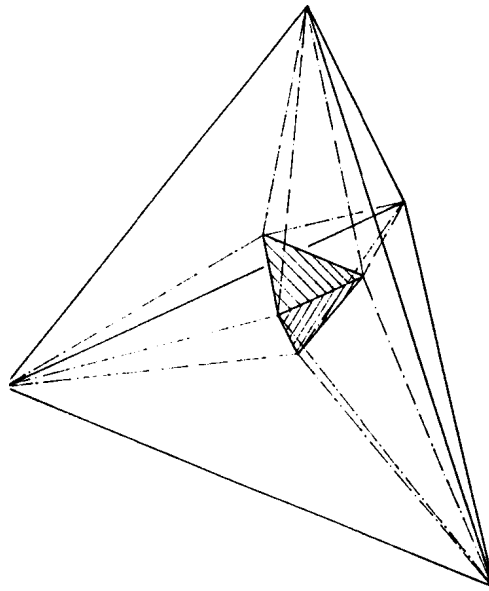
Nézzük a 4-dimenziós szabályos tetraédert. Legyen az egyik (X) csúcsa a terünkben, a szemközti h hiperlapja legyen párhuzamos a terünkkel, és maga a test legyen „fölött”. Legyen P nagyon kicsivel h középpontja „fölött”. Vetítsük a 4-dimenziós tetraédert P -ből a terünkre! X önmagába megy, h olyan szabályos tetraéderbe, amelynek X

¹ Fel lehet úgy is fogni, hogy h -nak h' komplementere, azaz végtelen tartomány felel meg. A térnek ez a felosztása már teljesen azonos kombinatorikus szerkezetű, mint az eredeti test.

a középpontja, a másik négy hiperlap képe pedig az ábrán látható módon bontja fel ezt a tetraédert 4 egybevágó kis tetraéderre. (X a közös pontjuk (5.b ábra)). A 4-dimenziós szabályos oktaédert kifordítva pedig az 5.c ábrát kapjuk, feltéve, hogy P -megint a h hiperlap középpontja felett választjuk. Ennek ellenőrzését az olvasóra bízom.



5. b ábra



5 c. ábra

A 4-dimenziós eset után már nem nehéz egy n -dimenziós konvex A poliéder „kifordítását” definiálni. Legyen h A -nak egy $(n-1)$ -dimenziós hiperlapja, legyen S egy olyan h -val párhuzamos $(n-1)$ -dimenziós hipersík, amelyre igaz, hogy A h és S között van. Legyen P elég kicsivel h egy belső pontja „fölött”, azaz a h által meghatározott, A -t nem tartalmazó féltérben. Vetítsük P -ből A -t S -re. A korábbiakkal analóg módon bizonyítható, hogy ez a vetület A -val megegyező kombinatorikus szerkezetű $(n-1)$ -dimenziós konvex tartományrendszer lesz. Konvex tartományrendszeren egy konvex poliédernek konvex poliéderekre való felosztását értem. A felosztásban szereplő kis poliéderek korlátos tartományok, a tér fennmaradó része alkotja a végtelen tartományt. (A végtelen tartomány nem konvex, viszont a komplementere igen.)

Mielőtt a „kifordítást” felhasználva belátnánk az n -dimenziós Euler-tételt, előbb vizsgáljuk meg az n -dimenziós szabályos testeket ($n \geq 5$), és sejtjük meg a tételt! $n \geq 5$ esetén már csak 3 szabályos n -dimenziós test van: a szabályos tetraéder, a kocka és a szabályos oktaéder általánosítása. (Ezt nem bizonyítjuk.) Ezeket $n = 4$ -re már vizsgáltuk az I. részben, majdnem ugyanúgy meg minden $n \geq 5$ -re is.

Nézzük először az n -dimenziós szabályos tetraédert. A 2-, 3- és 4-dimenziós eset analógiájára a n -dimenziós szabályos tetraédernek hívok egy n -dimenziós testet, ha $n+1$, páronként a távolságú csúcs, valamint az általuk meghatározott összes k -dimenziós él ($k = 1, 2, \dots, n-1$) alkotja. (A csúcs 0-dimenziós él, az él 1-dimenziós él, a lap 2-dimenziós él, ..., az $(n-1)$ -dimenziós hiperlap $(n-1)$ -dimenziós él.) A definícióból, rögtön következik, hogy

$$a_k = \binom{n+1}{k+1} k\text{-dimenziós éle van.}$$

Ugyanúgy, ahogy 4 dimenzióban, ebből a definícióból sem látszik, hogy van ilyen test, de ahogy a 4-dimenziós szabályos tetraédert előállítottuk a 3-dimenziósból, az n -dimenziósnak is elő lehet állítani az $(n-1)$ -dimenziósból: Vegyünk egy a élű $(n-1)$ -dimenziós szabályos $A_1 \dots A_n$ tetraédert, amelynek középpontja O . $A_1, \dots, A_n$ közül bármely kettőnek a távolsága a , tehát A_{n+1} -et úgy kell megválasztani, hogy $A_i A_{n+1}$ hossza is a legyen minden $i = 1, \dots, n$ -re. Ezt pedig most is úgy lehet megtenni, hogy O -ban merőlegest állítunk az $(n-1)$ -dimenziós térre, és O -ból valamelyik irányban

felmérünk $\sqrt{a^2 - OA_i^2}$ -t. Így kapjuk A_{n+1} -et, ezt összekötve az összes eddigi csúccsal megkapjuk az n -dimenziós szabályos tetraédert.

Tehát a szabályos háromszögből kiindulva a fenti lépést $(n - 2)$ -szer végrehajtva megkaphatjuk a szabályos n -dimenziós tetraédert. A 4-dimenziós kockára és a 4-dimenziós oktaéderre is volt olyan előállítás az I. részben, amelyik a 3-dimenziós megfelelőből indult ki. Mindkét előállítás szó szerint végrehajtható akkor is, ha $(n - 1)$ -dimenziós testből akarunk n -dimenziókat csinálni. Tehát az n -dimenziós szabályos tetraéderhez hasonlóan az n -dimenziós kockát és az n -dimenziós oktaédert is elő lehet állítani rekurzióval $(n - 2)$ lépésben a 2-dimenziós megfelelőjükből, vagyis a négyzetből. Az n -dimenzióban is lehet úgy definiálni a szabályos oktaédert, hogy csúcsai az n -dimenziós kocka $(n - 1)$ -dimenziós hiperlapjainak középpontjai, a szomszédos hiperlapokhoz tartozó csúcsai közötti szakaszok az élei. A két definíció ekvivalenciáját ugyanúgy kell bizonyítani, mint 4 dimenzióban. A koordináta-rendszerben való szép elhelyezés is szó szerint általánosítható 4 helyett az n -dimenziós szabályos testekre.

A vállalkozó kedvűeknek ajánlom, hogy továbbolvasás előtt oldják meg a következő egyszerű feladatot:

Feladat: Határozzuk meg az n -dimenziós kocka és az n -dimenziós oktaéder k -dimenziós éleinek számát ($k = 0, 1, \dots, n - 1$.)

Helyes számolás esetén azt kapjuk, hogy a válasz a feladatra $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ a kocka, és $\binom{n}{k+1} \cdot 2^{k+1}$ az oktaéder esetén. Tetraéderre már korábban láttuk, hogy $\binom{n+1}{k+1}$ a válasz. Jelölje a_k a k -dimenziós élek számát. A 3-dimenziós Euler-tétel ezzel a jelöléssel úgy szól, hogy konvex poliéderekre $a_0 - a_1 + a_2 = 2$. Ha megpróbálunk valami ilyesmit kihozni legalább erre a 3-féle szabályos testre, akkor némi próbálkozás után azt tapasztaljuk, hogy

$$(1) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

ezekre a testekre igaz. Ezután már reménykedhetünk benne, hogy (1) esetleg igaz tetszőleges konvex poliéderre. Elárulom, hogy nem hiába reménykedünk, be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Tétel: Minden n -dimenziós konvex poliéderre ($n \geq 2$) igaz, hogy

$$(1) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

ahol a_k jelöli a k -dimenziós élek számát.

Ezt a tételt felfoghatjuk minden egyes n -re külön állításként. Adott n -re jelöljük ezt az állítást A_n -nel.

A tételt párhuzamosan fogjuk bizonyítani a következő tétellel:

Tétel: Minden n -dimenziós konvex tartományrendszerre ($n \geq 1$) igaz, hogy:

$$(2) \quad l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + \dots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n \cdot l_n = 1,$$

ahol l_k a tartományrendszerben lévő k -dimenziós élek számát jelöli $k = 0, 1, \dots, n - 1$ esetben; l_n pedig a korlátos tartományok számát jelöli.

Ezt a tételt adott n -re B_n -nel jelöljük.

A tételek bizonyításához a következőket fogjuk belátni:

α : B_1 igaz.

β : B_{n-1} -ből következik A_n .

γ : B_{n-1} -ből következik B_n . (Ennek bizonyításakor β -t fel fogjuk használni.)

Ez elég, hiszen α -ból és γ -ból következik B_n $n \geq 1$ -re, B_n -ből és β -ból pedig következik A_n $n \geq 2$ -re, és ezek együtt jelentik a két bizonyítandó tételt.

A bizonyítások:

α : Egy 1-dimenziós konvex tartományrendszer egy szakasz pontokkal felosztva kisebb szakaszokra. Erre $l_0 - l_1 = 1$ nyilván teljesül.

β : Vegyünk egy n -dimenziós konvex poliédert. Fordítsuk ki! Kapunk egy $(n - 1)$ -dimenziós konvex tartományrendszert. Erre tudjuk, hogy (2) igaz, másrészt hogy a kombinatorikus szerkezete megegyezik az eredeti test kombinatorikus szerkezetével, vagyis

$$(3) \quad a_0 = l_0, \quad a_1 = l_1, \quad \dots, \quad a_{n-2} = l_{n-2}, \quad a_{n-1} = l_{n-1} + 1,$$

hiszen l_{n-1} a korlátos tartományok száma volt, de van egy végtelen tartomány is. (3)-at beírva (2)-be kapjuk (1)-et.

γ : Ezt az állítást l_n , azaz a korlátos tartományok száma szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Nézzük először $l_n = 1$ esetén: $l_n = 1$ azt jelenti, hogy van egy konvex n -dimenziós poliéderünk, ami nincs felosztva a_k -val jelölve a k -dimenziós éleinek számát:

$$(4) \quad l_0 = a_0, \quad l_1 = a_1, \quad \dots, \quad l_{n-1} = a_{n-1}, \quad l_n = 1.$$

B_{n-1} -ből β szerint következik A_n , tehát az a_k számokra (1) teljesül. (1)-ből és (4)-ből viszont triviálisan következik (2).

Azt kell még bebizonyítani, hogy $l_n > 1$ esetén igaz az állítás, feltéve, hogy ugyanezt l_n -nél kevesebb korlátos tartomány esetén már tudjuk.

Legyen $l_n > 1$, és válasszunk ki két szomszédos korlátos tartományt. Mivel ezek konvex poliéderek, ezért egy $(n-1)$ -dimenziós S hipersíkkal szétválaszthatók. (A közös határ hipersíkja ilyen hipersík.) S -sel vágjuk ketté az eredeti (B) tartományrendszert. S mindkét oldalán kapunk 1-1 új n -dimenziós tartomány-rendszert, jelöljük ezeket C -vel, illetve D -vel, a k -dimenziós éleik számát c_k -val, illetve d_k -val ($k = 0, 1, \dots, n-1$), a korlátos tartományok számát c_n -nel, illetve d_n -nel. A szétvágás során minden korlátos tartományból legfeljebb egy-egy korlátos tartomány keletkezik S két oldalán, viszont a két szétválasztott tartomány csak egy-egy oldalra esik, ezért a korlátos tartományok számára $c_n < l_n$, $d_n < l_n$ teljesül. Ekkor viszont az indukciós feltevés szerint:

$$(5) \quad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots + (-1)^n c_n = 1$$

$$(6) \quad d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^n d_n = 1.$$

S kimetsz B -ből egy $(n-1)$ -dimenziós E tartományrendszert. Erre alkalmazva a B_{n-1} tételt:

$$(7) \quad l_0 - l_1 + l_2 + \dots + (-1)^{n-2} l_{n-2} + (-1)^{n-1} l_{n-1}$$

a szokásos jelölésekkel.

Vizsgáljuk meg az E tartományrendszert! E -nek egy k -dimenziós éle, illetve egy korlátos tartománya kétféleképpen keletkezhet: vagy az eredeti n -dimenziós B -nek is k -dimenziós éle volt (ezek számát jelöljük f_k -val), vagy egy B egy $(k+1)$ -dimenziós élének kettévágásakor keletkezett metszetként. Ezek számát jelöljük g_k -val. Nyilván:

$$(8) \quad l_k = f_k + g_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Számítsuk ki l_k -t ($k = 0, 1, \dots, n$) a c_k , d_k , l_n , f_k és g_k értékekből: Számoljuk össze először B csúcsait: B -nek van $c_0 - l_0$ csúcsa S egyik oldalán, $d_0 - l_0$ csúcsa a másik oldalán, f_0 csúcs pedig S -en, tehát

$$(9) \quad l_0 = c_0 - l_0 + d_0 - l_0 + f_0.$$

Számoljuk össze B k -dimenziós éleit ($k = 1, 2, \dots, n-1$): $c_k - l_k$ van S egyik oldalán, $d_k - l_k$ van S másik oldalán, f_k van S -en. Kétszer számoltuk azokat a k -dimenziós éleket, amelyeket S kettévág. Viszont éppen az ilyen kettévágásnál keletkezett $(k-1)$ -dimenziós élek számát jelöltük g_{k-1} -gyel, tehát

$$(10) \quad l_k = c_k - l_k + d_k - l_k + f_k - g_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

B korlátos tartományaira továbbá

$$(11) \quad l_n = c_n + d_n - g_{n-1},$$

hiszen c_n van S egyik, d_n a másik oldalán, és kétszer számoltuk a g_{n-1} darab kettévágott tartományt.

A kapott (5)–(11) egyenletekből egyszerűen fog adódni a bizonyítandó (2). A (9), (10), (11)-ből:

$$\begin{aligned} & l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + \dots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n l_n = \\ & = (c_0 - l_0 + d_0 - l_0 + f_0) - (c_1 - l_1 + d_1 - l_1 + f_1 - g_0) + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} (c_{n-1} - l_{n-1} + d_{n-1} - l_{n-1} + f_{n-1} - g_{n-2}) + (-1)^n (c_n + d_n - g_{n-1}) = \\ & = (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots + (-1)^n c_n) + (d_0 - d_1 + \dots + (-1)^n d_n) - \\ & \quad - 2(l_0 - l_1 + \dots + (-1)^{n-1} l_{n-1}) + \\ & \quad + (f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1}) + (g_0 - g_1 + \dots + (-1)^{n-1} g_{n-1}). \end{aligned}$$

(5) szerint az első zárójel 1, (6) szerint a második zárójel 1, (7) szerint a harmadik is 1, (8) és (7) szerint az utolsó kettő összege is 1. Tehát:

$$l_0 - l_1 + \dots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n l_n = 1 + 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 1,$$

és ezt akartuk bizonyítani. Ezzel γ -t beláttuk.

Tehát bebizonyítottuk α , β és γ -t, és a korábbiak szerint ezekből már következnek a tételeink.